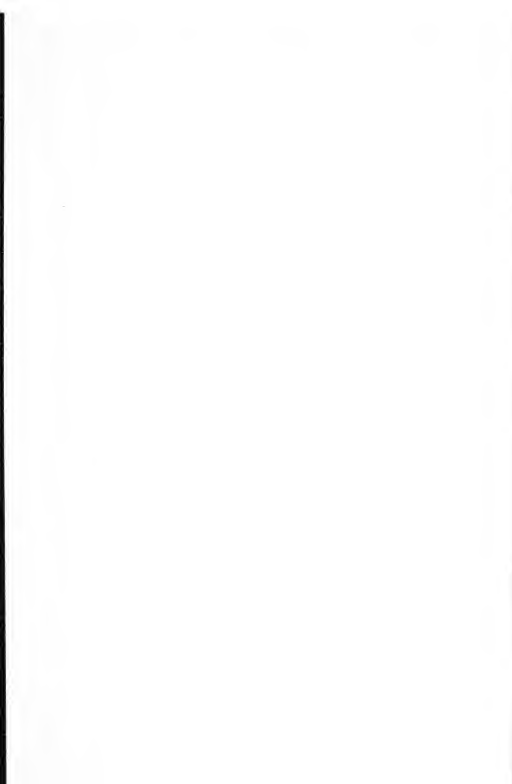


ДЖ.П.КОКС

Теория
звездных
пульсаций







John P. Cox

THEORY OF
STELLAR PULSATION

Princeton University Press
Princeton, New Jersey
1980

ДЖ. П. КОКС

Теория звездных пульсаций

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО

КАНДИДАТА

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

А.А.Памятных

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

КАНДИДАТА

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Д.К.Надёжина



МОСКВА «МИР» 1983

ББК 22.66

К 55

УДК 550.4

Коже Дж. П.

К 55 Теория звездных пульсаций: Пер. с англ. — М.: «Мир»,
1983, 328 с., ил.

В монографии профессора астрофизики Колорадского университета (США) собраны современные данные о звездных пульсациях как наблюдательные, так и теоретические. Последовательно рассмотрены радиальные (линейные адиабатические и неадиабатические, нелинейные неадиабатические) и нерадиальные колебания звезд. Книга снабжена обширной библиографией.

Для астрономов, физиков, геофизиков, математиков и механиков, занимающихся теорией колебаний, специалистов и студентов старших курсов.

К $\frac{1705040000-317}{041(01) - 83}$ 70 — 83 ч.1

ББК 22.66
52

*Редакция литературы по космическим исследованиям,
астрономии и геофизике*

© 1980 by Princeton University Press

© Перевод на русский язык, «Мир», 1983

Пульсирующие звезды образуют многочисленный и удивительно разнообразный по своим характеристикам подкласс физических переменных звезд. Периодические изменения их блеска и других свойств вызваны не внешними причинами (например, затмениями в двойной звездной системе), а попеременным расширением и сжатием звезды. К пульсирующим относятся звезды типа δ Цефея, RR Лиры, W Девы, Миры Кита, RV Тельца, δ Щита и др. Сильно различаясь по свойствам, эти объекты сходны в том, что все они находятся на стадиях эволюции, когда гидростатическое равновесие звезды как целого оказывается неустойчивым по отношению к возбуждению пульсаций. Период пульсаций, амплитуда и форма кривых блеска и лучевых скоростей в принципе содержат важную информацию о внутреннем строении пульсирующих звезд. Но чтобы воспользоваться этой информацией, необходимо располагать хорошо развитой теорией звездных пульсаций.

Книга Джона П. Кокса — профессора астрофизики Колорадского университета (США), уже более четверти века успешно работающего над развитием теории звездных пульсаций, представляет собой четвертую в мировой литературе монографию по теории колебаний звезд, если помним классическую книгу С. Росселанда (1949 г.) и появившейся недавно (1979 г.) книги японских авторов по нерадиальным колебаниям звезд (принять во внимание также энциклопедическую статью П. Леду и Т. Вальравена (1958 г.)). В своем предисловии автор справедливо отмечает явный дефицит в литературе по теории физических переменных звезд. В связи с этим мы ниже остановимся несколько подробнее на развитии наших представлений о звездных пульсациях.

Своевременность и важность перевода книги Дж. П. Кокса следует из того, что на русский язык из упомянутых четырех публикаций была переведена лишь книга Росселанда, отражающая начальный этап развития теории тридцатилетней давности. Тогда еще не был найден конкретный механизм возбуждения колебаний звезды. Однако уже через несколько лет С. А. Жвакин показал, что первостепенную роль в возбуждении пульсаций играет расположенная во внешних слоях звезды зона второй ионизации гелия. С этого момента теория поднялась на более высокую ступень развития, чему во многом способствовали также последующие работы В. И. Алешина, Р. Кристи и автора настоящей книги. Одновременно значительно расширились и детализировались наблюдения физических переменных звезд.

К настоящему времени теория звездных пульсаций уже достаточно созрела и способна не только объяснить имеющиеся данные, но и определять программу дальнейших целенаправленных наблюдений пульсирующих звезд. Однако такой прогресс в нашем понимании физических переменных звезд основан на кропотливом труде и энтузиазме многих поколений астрономов и астрофизиков. В связи с этим отметим, что на последнюю четверть XX в. приходится ряд памятных дат, относящихся к наблюдениям и теории пульсирующих звезд. Почти 400 лет назад (1596 г.) немецкий астроном Давид Фабрициус заметил, что блеск звезды в созвездии Кита, относительно которой он измерял положение наблюдавшегося им Меркурия, изменяется со временем. Эта звезда, на-

звания впоследствии Я. Гевелием Мирой (или Удивительной) Кита, оказалась типичным представителем целой группы долгопериодических пульсирующих звезд-гигантов. Около двухсот лет прошло с момента обнаружения (1784 г.) английским астрономом Джоном Гудрайком переменности блеска δ Цефея. Примерно 100 лет назад (в 1879 г.) немецкий физик А. Риттер положил начало теории звездных пульсаций. Он вывел выражение для частоты радиальных колебаний однородной звезды и установил обратную пропорциональность периода колебаний квадратному корню из средней плотности. Затем наблюдения А. А. Белопольского в Пулковской обсерватории (1894 г.) показали, что лучевая скорость δ Цефея изменяется с таким же периодом, как и блеск этой звезды. Еще через два года русский физик Н. А. Умов на защите диссертации Белопольским высказывает мысль о том, что эти наблюдения, возможно, свидетельствуют о пульсациях δ Цефея. Существование пульсирующих звезд стало общепризнанным после установления в 1908 г. Генриеттой Ливитт знаменитого, легшего в основу измерения межгалактических расстояний соотношения период — светимость, появления статьи Х. Шепли (1914 г.), в которой была продемонстрирована несостоятельность интерпретации цефеид как двойных звезд, и разработки А. Эддингтоном в 1918 — 1926 гг. основ теории звездных пульсаций.

В нашей стране, начиная с работ А. А. Белопольского (1854 — 1934), С. П. Глазенапа (1948 — 1937) и С. Н. Блажко (1870 — 1957), переменным звездам всегда уделялось большое внимание. Особенно значительный вклад в изучение переменных звезд вообще и, в частности, пульсирующих звезд внесли Б. В. Кукаркин (1909 — 1977), П. П. Паренина (1906 — 1960) и В. П. Цесевич, а также их многочисленные ученики и сотрудники. Некоторым итогом этих исследований можно считать серию монографий [1 — 5]*, в которых систематизированы и проанализированы обширные данные о различных типах переменных звезд.

Далеко не так широко представлена в отечественной астрофизической литературе теория колебаний звезд. В историческом плане поучительна дискуссия о причинах звездных пульсаций, развернувшаяся на Четвертом совещании по вопросам космологии (Москва, октябрь 1954 г.) [6]. Следует отметить также симпозиум по проблеме «Звездная эволюция и переменные звезды» (Москва, ноябрь 1964 г.), на котором специальное внимание было обращено на важную для выяснения природы физической переменности связь между эволюцией и устойчивостью звезд по отношению к пульсациям [7]. Небольшая, но насыщенная идеями статья С. А. Жевакина опубликована в книге [4]. Некоторые важные теоретические вопросы обсуждаются также в отдельных главах книг [8, 9]. Вот, пожалуй, и весь перечень публикаций (помимо статей в специальных научных журналах) по теории колебаний звезд. Поэтому нет сомнений, что книга Дж. П. Кокса восполнит существующий досадный пробел.

Книга состоит из трех основных частей: описания общих принципов (ч. I), изложения теории радиальных пульсаций (ч. II) и основ теории нерадиальных колебаний звезд (ч. III). Помимо тщательного рассмотрения линейных адиабатических колебаний звезд, базирующегося на анализе уравнения типа Штурма — Лиувилля, значительное внимание уделяется влиянию неадиабатичности, проблеме сдвига фаз между кривыми блеска и лучевых скоростей пульсирующих звезд и критерию устойчивости звезд по отношению к пульсациям. Хотелось бы отметить гл. 13, в которой на простых моделях демонстрируется специфика пульсационной неустойчивости звезд и возникновения в них установившихся колебаний (предельного цикла). Для специалистов по теории колебаний, интересующихся приложениями, эта глава может служить хорошим введением в удивительный мир звездных пульсаций.

Часть III является введением в теорию нерадиальных колебаний звезд, которая по-

* См. список литературы в конце предисловия.

лучила за последние годы сильный стимул к развитию благодаря открытию колебаний Солнца с периодами от 5 до 160 мин и чрезвычайно малой (по сравнению с обычными пульсирующими звездами) амплитуды. Дж. П. Кокс знакомит читателя с основами теории: с выводом уравнений малых нерадiallyных колебаний, с классификацией колебаний на p -, f - и g -моды и с результатами расчетов периодов и собственных функций для нерадiallyных колебаний политропных газовых шаров. Кроме того, обсуждаются различные вопросы теории, требующие дальнейшего развития (возбуждение и затухание отдельных мод, эффекты неадиабатичности и переменыности химического состава и т.д.). В качестве дополнения к данной части книги Дж. П. Кокса можно рекомендовать обзор [10].

В последней гл. 19 кратко обсуждаются еще не решенные до конца, но важные для приложений вопросы, такие, как влияние на пульсации вращения звезды (см. также [10]), магнитных полей, конвекции, эффектов общей теории относительности и отсутствия теплового равновесия.

За прошедшие после английского издания книги Дж. П. Кокса три года не появилось новых книг или обзоров. Однако продолжали выходить статьи в научных журналах, и состоялись два организованных Международным астрономическим союзом коллоквиума: № 58 «Звездная гидродинамика» (Лос-Аламос, США, август 1980 г.) и № 66 «Проблемы колебаний Солнца и звезд» (Крымская астрофизическая обсерватория, СССР, сентябрь 1981 г.). Труды коллоквиума № 58, на котором было уделено внимание и звездным пульсациям, уже опубликованы [11], а труды коллоквиума № 66 должны появиться в одном из ближайших номеров международного журнала *Solar Physics*. Отметим работы [12, 13], в которых рассмотрена известная проблема расхождения между оценками масс цефеид по теории звездной эволюции и по нелинейной теории звездных пульсаций. Результаты позволяют надеяться, что это расхождение не является критическим и может быть ликвидировано последующими уточнениями обеих теорий. Другой важной проблемой, продолжающей беспокоить теоретиков, остается влияние конвекции на положение красной (холодной) границы полосы неустойчивости на диаграмме Герцшпрунга — Рассела (см. [14] и ссылки там). Пожалуй, наиболее впечатляющее достижение нелинейной теории пульсаций за последние годы — ее успешное применение к звездам с большим отношением светимости к массе, что, в частности, способствовало существенному прогрессу в понимании замечательных нестационарных звезд типа FG Стрелы [15, 16].

В основу книги Дж. П. Кокса легли лекции, обзоры и оригинальные статьи, что, по-видимому, повлияло на стиль изложения: логически стройный текст учебника сменяется «каниотационной вязью» научного обзора или подробными разъяснениями физического смысла. Вообще стремление автора к физической ясности — одно из главных достоинств книги. Другое достоинство — высокий научный уровень и широкое использование достижений в смежных областях знания. При этом автор часто ссылается на учебники и монографии, не все из которых доступны советскому читателю. Взамен можно рекомендовать следующую отечественную литературу: по векторному и тензорному анализу — книгу [17], по уравнениям математической физики — [18, 19], по газовой динамике — [20 — 23], по методам вычислений — [19, 22, 24 — 26], по теории колебаний [27 — 29], по асимптотическим методам — [30].

Редактор, переводчик и издательство приносят автору искреннюю благодарность за большую помощь, оказанную при подготовке русского издания.

Есть все основания надеяться, что предлагаемый перевод книги Дж. П. Кокса будет полезен не только астрофизикам, но и заинтересует специалистов по теории колебаний и газовой динамике. Книга имеет достоинства как учебника, так и научной монографии, в которой кроме устоявшихся результатов сформулированы нерешенные задачи и очерчены перспективы развития теории. Поэтому можно ожидать, что «Теория

звездных пульсаций» найдет широкую читательскую аудиторию — от студентов до научных сотрудников самой высокой квалификации.

Октябрь 1982 г.

Д. К. Надежин

ЛИТЕРАТУРА

1. Кукаркин Б. В., Паренего П. П. Переменные звезды, т. 1, Физические переменные звезды. — М.-Л.: ОНТИ, 1937.
2. Паренего П. П., Кукаркин Б. В. Переменные звезды и способы их наблюдения. — М. — Л.: ОГИЗ Гостехиздат, 1947.
3. Цесевич В. П. Переменные звезды и способы их исследования. — М.: Педагогика, 1970.
4. Пульсирующие звезды/Под ред. Б. В. Кукаркина. — М.: Наука, 1970.
5. Явления нестационарности и звездная эволюция/Под. ред. А. А. Боярчука и Ю. Н. Ефремова. — М.: Наука, 1974.
6. Труды четвертого совещания по вопросам космогонии: Нестационарные звезды. — М.: АН СССР, 1955.
7. Проблемы звездной эволюции и переменные звезды/Под ред. И. М. Копылова. — М.: Наука, 1968.
8. Франк-Каменецкий Д. А. Физические процессы внутри звезд. — М.: Физматгиз, 1959.
9. Дибай Э. А., Каплан С. А. Размерности и подобие астрофизических величин. — М.: Наука, 1976.
10. Воронцов С. В., Жарков В. Н. Собственные колебания Солнца и планет-гигантов. — УФН, 134, 675, 1981.
11. Stellar Hydrodynamics. Proc. 58th Colloq. IAU, Los Alamos, Aug. 12 — 15, 1980, Space Sci. Rev., 27, No.3 — 4, 1980.
12. Hodson S. W., Cox A. N. Nonlinear calculations for bump cepheids, Lecture Notes Phys., 125, 34, 1980.
13. Фадеев Ю. А. Теоретическая последовательность Гершпрунга и зависимость масса — светимость классических цефеид. — Научные информации Астрон. Совета АН СССР, 47, 38, 1981.
14. Памятных А. А. Об определении положения красной границы полосы неустойчивости с помощью линейных расчетов пульсаций звезд. — Научные информации Астрон. Совета АН СССР, 46, 126, 1979.
15. Fadeyev Yu. A., Tutukov A. V. A hydrodynamical model of FG Sagittae pulsations, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 195: 811, 1981.
16. Fadeyev Yu. A. Models of pulsating low-massive yellow supergiants. Astrophys. Space Sci., 86, 143, 1982.
17. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. — М.: Наука, 1965.
18. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смиринов М. М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. — М.: Физматгиз, 1962.
19. Годунов С. К. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1971.
20. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: Наука, 1966.
21. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. — М.: Наука, 1981.
22. Рождественский Б. Л., Яценко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1978.
23. Имшенник В. С., Морозов Ю. И. Радиационная релятивистская газодинамика высокотемпературных явлений. — М.: Атомиздат, 1981.

24. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. — М.: Наука, 1973.
25. Дьяченко В. Ф. Основные понятия вычислительной математики. — М.: Наука, 1972.
26. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные схемы газовой динамики. — М.: Наука, 1975.
27. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Наука, 1981.
28. Горелик Г. С. Колебания и волны. — М.: Физматгиз, 1959.
29. Мигулин В. В., Медведев В. И., Мустель Е. Р., Парыгин В. Н. Основы теории колебаний. — М.: Наука, 1978.
30. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. — М.: Наука, 1981.

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Основная цель предлагаемой книги — собрать воедино многочисленные результаты и обсуждения, касающиеся звездных пульсаций и разбросанные по астрофизической литературе. Другая цель состояла в том, чтобы развить на современном уровне идеи, заложенные в двух классических работах по теории звездных пульсаций: книге Росселанда «Теория пульсаций переменных звезд» [465] и энциклопедической статье Леду и Вальравена [345]. (Недавно вышла в свет прекрасная монография Унно, Осаки, Андо и Сибахаси «Нерадиальные колебания звезд» [593].) Статья Леду и Вальравена является поистине исчерпывающей, и настоящая книга ни в коей мере не пытается заменить эту классическую работу или конкурировать с ней. Эту статью я цитирую практически в каждом разделе книги.

Однако статья Леду и Вальравена была опубликована в 1958 г., а за прошедшие четверть века в теории пульсаций получено много новых результатов. Поэтому одна из целей книги — представить некоторые из современных достижений.

Теория звездных пульсаций почти целиком базируется на законах классической нерелятивистской физики. На них основано практически все наше изложение (обобщение теории пульсаций с учетом эффектов общей теории относительности в большинстве случаев выходит за рамки настоящей книги, лишь в гл. 19 кратко и, вероятно, недостаточно исчерпывающе описываются эти эффекты).

В книге представлены как радиальные, так и нерадиальные колебания. Рассмотрение нерадиальных колебаний следует считать лишь введением в проблему; гораздо более глубокий, детальный и обстоятельный анализ можно найти в упомянутой выше монографии японских авторов [593].

Значительные усилия были затрачены на то, чтобы четко объяснить различие между эйлеровыми и лагранжевыми вариациями. Кроме того, линеаризованные уравнения были записаны для наиболее общего случая, когда в невозмущенной модели присутствует поле скоростей.

Советское издание книги практически не отличается от американского издания 1980 г.; были исправлены лишь несколько опечаток. Кроме того, по предложению переводчика А. А. Памятных были внесены несколько стилистических и других мелких изменений. Однако если бы мне пришлось писать книгу заново, то, думаю, я уделил бы больше места колебаниям Солнца и нелинейным расчетам. Недавние исследования подтвердили выводы о том, что Солнце, по-видимому, действительно подвержено разнообразным колебаниям, хотя и с малой амплитудой. Таким образом, Солнце следует, вероятно, считать переменной звездой (см., например, ряд статей в трудах конференции «Пульсации классических и катаклизмических звезд», опубликованных в 1982 г. под ред. Дж. Кокса и К. Хансена). Нелинейные явления, без сомнения, часто играют решающую роль в теории звездных колебаний (например, при рассмотрении резонансов). Поэтому важно знать, как можно рассчитать влияние некоторых из этих нелинейных эффектов.

Перевод книги на русский язык является совершенно естественным. Советские уче-

ные внесли очень важный вклад в изучение пульсаций. Достаточно упомянуть лишь двоих. Если говорить о наблюдениях, то это Б. В. Кукаркин, под редакцией которого вышла важная книга «Пульсирующие звезды» [315] (переведенная в 1975 г. на английский язык) и который был соавтором (вместе с П. П. Паренаго) хорошо известной обзорной статьи в *Basic Astronomical Data* (ed. K. Aa. Strand, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1963). Вместе со своими сотрудниками Б. В. Кукаркин подготовил в конце 1960 — 1970-х годах классический «Общий каталог переменных звезд» и дополнения к нему. Если говорить о теории, то необходимо отметить С. А. Жевакина, первым высказавшего идею о том, что главный источник неустойчивости классических цефеид, а возможно, и других типов переменных звезд связан с второй ионизацией гелия. Результаты его пионерских исследований были опубликованы в начале 1950-х годов в трех ставших теперь классическими статьях в «Астрономическом журнале» и переведенных впоследствии на английский язык. Эти работы оказали огромное влияние на развитие многих аспектов теории пульсирующих звезд. Некоторые из идей Жевакина были также опубликованы в обзорной статье в *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* [639] и в первой главе упоминавшейся выше книги «Пульсирующие звезды» [315].

В заключение мне хотелось бы искренне поблагодарить А. А. Памятных, взявшего на себя трудную и не слишком благодарную задачу перевода книги на русский язык. Он внес также ряд предложений, которые должны улучшить ясность и точность изложения.

24 июня 1982 г.

Дж. П. Кокс

*Ричарду Н. Томасу,
предоставившему мне возможность
переработать и расширить конспект лекций,
на котором частично основана
настоящая книга*

ПРЕДИСЛОВИЕ

За прошедшие 30 лет на английском языке не было опубликовано ни одного учебника или монографии, посвященной теории звездных пульсаций. Последняя книга на эту тему, насколько мне известно, — это классический труд С. Росселанда (Теория пульсаций переменных звезд) [465], вышедший в 1949 г. и почти полностью посвященный теории чисто радиальных колебаний*. Даже со времени появления всеобъемлющей, поистине энциклопедической статьи П. Леду и Т. Вальравена [345] прошло уже более 20 лет. Эта статья многие годы служила и, несомненно, еще будет служить универсальным справочным пособием в рассматриваемой области; действительно, она упоминается почти в каждом разделе настоящей книги. Однако со времени публикации удалось решить ряд важнейших астрофизических задач, касающихся переменных звезд. Кроме того, многие основные представления теории нерадиальных колебаний оставались невыясненными вплоть до середины или конца 1960-х годов и все еще продолжают появляться новые результаты. Некоторые из последних достижений описаны в различных обзорных статьях (см. ссылки в гл. 1), однако эти статьи вместе с большей частью вспомогательного материала, необходимого для детального понимания теории звездных пульсаций, разбросаны по обширной физической и астрофизической литературе. В настоящей книге я собрал воедино значительную часть таких данных и попытался удовлетворить потребность астрофизиков во всестороннем и достаточно подробном анализе этих проблем на современном уровне.

В настоящей книге рассматривается теория как радиальных, так и нерадиальных колебаний. Однако ее обобщение в рамках общей теории относительности (середина 1960-х годов и позже) почти не затрагивается. Таким образом, если специально не оговорено, то предлагаемое рассмотрение проводится в рамках ньютоновской нерелятивистской физики.

Книга состоит из трех частей. Часть I включает пять глав и содержит краткие сведения о важнейших данных наблюдений (гл. 3), краткую сводку основных уравнений гидродинамики и потока тепла, представленных в виде, удобном для астрофизических приложений (гл. 4), и довольно подробное рассмотрение линейной теории (гл. 5). Я постарался как можно лучше объяснить различия между эйлеровыми и лагранжевыми вариациями и записать линеаризованные уравнения для наиболее общего случая, когда имеется поле скоростей. Большая часть изложения основана на моей работе 1967 г. [132]. Я использовал также свои неопубликованные результаты, полученные в 1974 г.

Часть II, состоящая из восьми глав, посвящена чисто радиальным колебаниям. Здесь очень подробно представлена теория линейных адиабатических радиальных колебаний (гл. 8), а также рассмотрены теория и расчеты неадиабатических и нелинейных колебаний (гл. 9 — 12). В гл. 13 описаны некоторые простые модели звездных пульсаций

* Недавно Уино, Осаки, Андо и Сибакхаси [593] опубликовали монографию, посвященную нерадиальным колебаниям звезд.

(преимущественно радиальных). Кратко упомянуты также некоторые последние достижения в развитии наших представлений о переменных звездах.

Часть III, включающая шесть заключительных глав посвящена в основном, теории нерадиальных звездных колебаний. Обозначения и терминология, используемые в теории нерадиальных колебаний, приводятся в гл. 17. Большая часть этой главы написана в 1976 — 1977 гг., и поэтому в ней не отражены более поздние детальные результаты, представленные, например, в работах Кристеисена-Далсгаарда [86], Сибахаси [507] и Вольфа [626] и в монографии Унио, Осаки, Андо и Сибахаси [593]. Данное обстоятельство, хотя и вызывает сожаление, но оно неизбежно в быстро развивающихся областях науки, особенно если учесть, что требуется значительное время на публикацию. В эту часть книги я включил не только те вопросы, которые могут считаться логически связанными с общей темой, но и некоторые из последних результатов, упомянутых выше. В частности, гл. 19 как раз посвящена смешанным вопросам. Рассматриваемые в этой главе случаи характеризуются прежде всего отказом от одного или нескольких обычно принимаемых предположений — предположений, которые считаются справедливыми в большинстве остальных глав книги.

По своему уровню книга рассчитана на аспирантов первого года обучения. Предполагается знание математического анализа, дифференциальных уравнений, векторного анализа и матричной алгебры. Из-за ограниченного объема в большинстве случаев не удалось привести подробные доказательства и выводы, а поэтому читателю, возможно, придется проделать это самому.

Хотя данная книга не писалась как учебник (например, в ней нет никаких упражнений), тем не менее она может оказаться полезной и в качестве учебника. Думается, в ней более чем достаточно материала, чтобы организовать для аспирантов одно — двухсеместровый курс по переменным звездам. Вероятно, книга будет наиболее полезной студентам и научным сотрудникам, работающим в этой и смежных областях.

Настоящая книга основана в значительной степени на заметках, подготовленных для курса лекций по переменным звездам, который автор читал несколько раз за последние 15 лет аспирантам Колорадского университета. В книгу включены также материалы из нескольких обзорных статей автора, посвященных переменным звездам (разумеется, эти обзорные статьи частично базируются на том же самом курсе лекций!).

Мне доставляет большое удовольствие поблагодарить всех, кто прямо или косвенно внес свой вклад в эту книгу. Я хотел бы выразить особую признательность Колорадскому университету за предоставление мне отпуска в течение весеннего семестра 1975 г., когда я начал и частично завершил переработку моих конспектов в книгу. Я благодарен также проф. В. Ридженеру за предоставленную мне возможность работать на факультете физики и астрономии Университета Нью-Мексико в течение части этого периода, и проф. Д. Книгу за большую моральную поддержку и многочисленные полезные обсуждения.

Я особенно благодарен д-ру М. Айзенману за его содействие в издании книги и за многочисленные обсуждения и проф. С. Чандрасекару за прочтение некоторых глав и полезные замечания, а также за большую общую помощь и советы. Я благодарен проф. К. Хансену, прочитавшему и прокомментировавшему многие главы и сделавшему ряд полезных предложений, проф. Н. Бейкеру, также прочитавшему и прокомментировавшему несколько глав, и проф. М. Смитту, высказавшему полезные замечания и предложения, касающиеся прежде всего гл. 17. Я признателен д-ру С. Г. Дэвис, любезно обратившей мое внимание на ряд статей и материалов конференций, которые в противном случае не вошли бы в эту книгу. В то же время я заранее приношу извинения тем лицам, работы которых цитировались недостаточно.

Полезные дискуссии с проф. А. Вайгертом, д-ром М. Айзенманом и проф. П. Смей-

ерсом помогли мне более четко понять многие основные идеи. Я особенно благодарен проф. Смейерсу за его квалифицированную помощь в некоторых сложных вопросах. Я также признателен Д. Шванку, Р. Гроссу и Б. Кэрролу за помощь в кажущейся нескончаемой работе при подготовке книги подобного рода. Я благодарен также А. Уинну и М. Кроуч за их любезную помощь в подготовке библиографии. Большую помощь оказал также проф. Р. Мак-Крей в поисках ссылок на работы о вспыхивающих рентгеновских источниках.

Мне хотелось бы поблагодарить мою жену, д-ра Дж. Близард-Кокс, за проявленное ею терпение, ободрение и моральную поддержку в течение почти четырех лет и принести извинения за мои многочисленные отъезды, потребовавшиеся для написания этой книги.

На окончательное содержание книги прямо или косвенно повлияли дискуссии с многими людьми в дополнение к тем, кого я упомянул. Среди них — Т. Адамс, Г. Бергрэн, У. Бриттэн, Т. Браун, Р. Бачлер, Дж. Кастор, Й. Кристенсен-Далсгаард, Р. Кристи, Л. Клаутмен, Б. Коган, А. Кокс, Е. Ф. Кокс, У. Р. Дейви, Д. Дэвисон, Р. Дюпри, Б. Л. Дикерсон, В. Дзембовски, Д. Эйлерс, Дж. Фоллер, Д. Фишел, У. Фитч, Ф. Флауэр, Р. Гарстанг, М. Гуссенс, Д. Гаф, Г. Хилл, С. Хилл, Н. Хоффман, Д. Хаммер, Ч. Келлер, Дж. Ленджер, Ж. Лятур, П. Леду, Дж. Леш, Д. Линд, Дж. М. Мэлвилл, Дж. Мак-Гро, П. Мелвин, В. Михалас, Д. Михалас, Дж. Нельсон, Ё. Осаки, А. Фелпс, Р. Росс, Х. Сайо, Э. Шмидт, М. Шварцшильд, Р. Скуфлер, Н. Саймон, А. Скананич, У. Спэнгенберг, У. Спаркс, С. Старфилд, Р. Стеллингверф, К. Стеркен, Р. Стоуби, П. Страй, Ю. Тумре, Х. ван Хорн, Дж. Валлерстейн, Б. Уорнер, Дж. К. Уилер, Ч. Уитни, Д. Уингет, Ч. Вольфф, К. Зафиратос и К. Зибарт.

Я особенно благодарен многим студентам, число которых слишком велико, чтобы перечислить их фамилии, за то, что они терпеливо слушали мои лекции, и за их вопросы, приведшие к более ясному пониманию мною некоторых деталей. Это в свою очередь, вероятно, способствовало более четкому изложению ряда вопросов в данной книге.

Я искренне благодарен многочисленным авторам, приславшим мне препринты своих работ в течение нескольких последних лет.

За квалифицированную подготовку рукописи и за помощь в других редакционных делах я очень признателен Л. Вольски, Л. Хаас и Г. Ромн.

За любезное разрешение воспроизводить опубликованные материалы я благодарен Американскому институту физики, Астрономическому обществу Японии, редакциям журналов *Astronomy and Astrophysics*, *Astrophysical Journal*, *Annual Reviews*, Inc. Мне хотелось бы поблагодарить также издательство Принстонского университета и его сотрудников за большое терпение и снисходительность. При этом я особенно благодарен г-ну Э. Тенеру.

Большая финансовая поддержка в течение времени, потребовавшегося для написания книги, была оказана по субсидиям Национального научного фонда MPS 72-05309, AST 72-05039 A04, AST 77-23183, AST 76-01586 и AST 78-42115, предоставленным через Колорадский университет. Я благодарен также д-ру Ч. Ф. Келлеру за его разрешение работать в Лос-Аламосской научной лаборатории (финансовая поддержка была обеспечена Администрацией по исследованию и разработкам источников энергии), и я признателен д-ру А. Коксу из этой лаборатории за проявленный им интерес к моей работе и наши многочисленные дискуссии в течение ряда лет.

15 августа 1979 г.

Часть I

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

ГЛАВА I ВВЕДЕНИЕ

Пульсирующие звезды — это объекты, в которых происходят крупномасштабные динамические движения, обычно охватывающие всю звезду и, как правило, более или менее ритмичные. Простейшим типом таких движений являются чисто радиальные пульсации, при которых звезда сохраняет сферическую форму, но изменяет свой объем — как бы «дышит».

Изучение пульсирующих звезд составляет относительно небольшую, но очень важную область современной астрофизики. Идея, что колебания блеска некоторых типов переменных звезд обусловлены периодическим или циклическим расширением и сжатием, впервые была высказана в 1914 г. Шепли [505], а ее строгие математические основы были заложены в 1918 г. Эддингтоном [195, 196]. С тех пор «гипотеза пульсаций» получила широкое распространение. Исследование пульсирующих звезд, как теоретическое, так и с помощью наблюдений, дало мощное средство для изучения внутреннего строения звезд и для развития других областей современной астрофизики. (Краткое описание ранних этапов развития теории пульсаций дано в кингах Россе-Ланда [465, гл. 1] и Эддингтона [197, ch. 8] и в статье Леду и Вальравена [345].) Одним из наиболее эффектных и фундаментальных результатов, полученных из наблюдений лучше всего известного типа пульсирующих звезд — *классических цефеид*, — является известное соотношение *период — светимость* (разд. 3.1). Это соотношение служит основным «этапоном» для измерения огромных астрономических расстояний — порядка среднего расстояния между галактиками, — и оно сыграло решающую роль в установлении фундаментальной шкалы расстояний во Вселенной. Кроме того, попытки понять причины и природу звездных пульсаций бросили своего рода вызов теоретикам и привели к некоторым захватывающим и в известном смысле уникальным применениям физической теории. Важность и значение исследования пульсирующих звезд будут также рассмотрены в разд. 19.7.

Пульсирующие звезды представляют собой лишь подкласс более широкого класса *физических переменных звезд*. Это такие звезды, причина переменности которых заключена в них самих, а не обусловлена геометрическими эффектами, как для затмевенных двойных, или некоторыми внешними причинами, например взаимодействием с межзвездной средой или околозвездным веществом. Весь класс физических переменных включает в себя много различных типов объектов, причем некоторые из них, такие, как квазизвездные объ-

екты, не являются звездами в обычном смысле слова. (Обзоры работ о квазарах даны, например, в [58, 437]*, полупопулярное описание см. в [530].) Физические переменные обычно подразделяют на две обширные группы: *пульсирующие переменные* и *зруптивные переменные*. Предлагаемая монография имеет дело в основном с первой группой: краткий обзор входящих в нее типов звезд будет дан в гл. 3. Типичными представителями зруптивных переменных являются новые и сверхновые, которые в данной книге подробно рассматриваться не будут. Обзоры, посвященные некоторым типам зруптивных переменных, можно найти, однако, в [402, 510] (сверхновые); [426] (новые); [319, 345, 425] (весь класс физических переменных, включая повторные новые и новоподобные звезды); [388] (карликовые новые); [455, 614] (катаклизмические переменные в целом); [264] (звезды типа Т Тельца). См. также материалы коллоквиума № 42 МАС [306]. Если специально не оговорено, то в данной книге под термином «переменная звезда» мы всегда будем подразумевать «физическая переменная звезда».

Наиболее общее определение переменной звезды — это звезда, физические свойства которой с течением времени изменяются. Однако обычно принимается более ограниченное определение: переменными обычно называют такие звезды, свойства которых заметно изменяются за время, скажем, от нескольких секунд или долей секунды до нескольких лет или десятилетий, и поэтому подобные изменения довольно легко обнаруживаются в наблюдениях.

Самая очевидная и легче всего обнаруживаемая особенность переменной звезды — колебания ее видимого блеска: и действительно, большинство таких звезд открыто по изменениям их блеска. При этом обычно меняются и другие наблюдаемые параметры, такие, как лучевая скорость и спектральный класс или цвет. У *пульсаров* наблюдается переменное радионизлучение с периодом от нескольких долей секунды до нескольких секунд, по которому их обычно обнаруживают [233, 267, 471, 472, 529, 569]. Однако у *пульсара* NP 0532 в Крабовидной туманности были открыты одновременные изменения видимого блеска [102]. У некоторых рентгеновских «пульсаров» также найдены изменения блеска, происходящие одновременно с рентгеновскими всплесками [158, 221, 276, 322]. С другой стороны, в некоторых случаях, как, например, у спектральных или магнитных переменных или у звезд спектрального класса В с переменными профилями линий (звезды типа 53 Персея) [531–534, 537], блеск может оставаться почти постоянным, а на переменность звезд могут указывать изменения некоторых других характеристик, например деталей в спектре или напряженности магнитного поля (см., например, [183, 342, 486]). Благодаря 11-летнему циклу Солнца, строго говоря, также является переменной звездой (даже если не упоминать мелкомасштабных колебаний, зарегистрированных Хиллом с сотрудниками* [54, 268, 272]; см. также многочисленные статьи в [270] и различные ссылки в [247], а в связи с общей

* См. также Schmidt M. Ann. Rev. Astron. Astrophys., 7, 527, 1969.

* Сообщалось также об открытии колебаний Солнца с периодом 160 мин (Severny A. B., Kotov V. A., Tsap T. T. Nature, 259, 87, 1976, Brookes J. R., Isaak G. R., van der Raay H. R. Nature, 259, 92, 1976.) — Прим. ред.

проблемой возможной переменности Солнца еще и книги [201, 621]). Кроме того, вспыхивающие рентгеновские источники также показывают изменения с характерным временем порядка минут (см., например, [248, 348—350]), а для источников гамма-всплесков характерна переменность с временами порядка 0,1—100 с (см., например, [101, 216, 307, 562]). (Рентгеновским источникам в целом посвящен обзор Острайкера [412].)

Изменения, свойственные пульсирующим переменным, могут быть периодическими (или циклическими), полуправильными или неправильными. Соответствующие характерные времена заключены в диапазоне от нескольких десятков секунд до нескольких лет. Возможно, конечно, что существуют изменения с характерными временами и вне указанного диапазона, но проблема их обнаружения довольно сложна.

Периодические или циклические переменные были открыты относительно поздно в истории астрономии. Вероятно, первой достоверной регистрацией такой переменной звезды было открытие Фабрициусом в 1596 г. (см. [345]) Миры Кита (*ο* Ceti) — долгопериодической переменной (гл. 3). Были зарегистрированы также несколько сверхновых: сверхновая 1054 г. в Крабовидной туманности, сверхновая Тихо 1572 г. и сверхновая Кеплера 1604 г., но все они относятся к классу эруптивных переменных. К концу XVIII в. были открыты лишь 16 переменных звезд, две из которых впоследствии оказались затменными двойными, а пять были новыми [61]. Две звезды из оставшихся девяти — классические цефеиды: δ Цефея, типичный представитель всей этой группы (гл. 3), открытая Джоном Гудрайком в 1784 г., и η Орла, открытая в том же году Эдвардом Пиготтом [61]. В настоящее время в нашей Галактике известно около 25 000 физических переменных звезд, свыше 20 000 из которых собраны в каталоге Кукаркина и др. [316]. Более 90% из них — пульсирующие переменные. Полное число таких переменных во всей Галактике составляет, по оценкам Кукаркина и Паренаго [319], около $2 \cdot 10^6$ звезд. Но поскольку общее число звезд в Галактике около $10^{11} - 10^{12}$, то это означает, что лишь одна из $10^5 - 10^6$ звезд является пульсирующей. Поэтому в целом звездные пульсации оказываются весьма редким явлением. Тем не менее они имеют очень большое значение в астрофизике, как будет показано в последующих главах данной книги. Открытие переменных белых карликов, или «звезд типа ZZ Кита», [363, 392, 456—458], может несколько изменить указанные оценки.

В гл. 2 мы введем, главным образом для общего представления, некоторые характерные времена для звезд. В гл. 3 мы дадим краткий обзор эмпирических данных о пульсирующих переменных. Поскольку наблюдениям переменных звезд посвящено очень много работ и ряд хороших обзоров (ссылки на которые мы укажем), мы приведем лишь наиболее важные данные.

В гл. 4 мы кратко изложим некоторые основные теоретические результаты, которые часто будут использоваться в дальнейшем. Если специально не оговорено, то в этой главе, как всюду в этой книге, мы будем вести рассмотрение в рамках классической механики и ньютоновской теории тяготения. Пренебрежение эффектами специальной теории относительности при рассмотрении пульсирующих звезд в большинстве случаев вполне оправданно, поскольку характерные скорости обычно малы в сравнении со скоростью све-

та. Пренебрежение эффектами общей теории относительности также оправдано для большинства пульсирующих звезд, поскольку гравитационные поля обычно очень слабые; иными словами, средние радиусы большинства типов пульсирующих звезд много больше их радиусов Шварцшильда $R_S = 2GM/c^2$, где G — гравитационная постоянная, M — масса звезды, а c — скорость света. Примерами звездных объектов, в которых указанные приближения не выполняются, являются плотные белые карлики (см., например, [375]), нейтронные звезды, «сверхмассивные звезды», если они существуют (см., например, [613]), и сколлапсировавшие объекты, или «черные дыры» (см., например, [193; 434; 473; 573; 635, гл. 11]). В настоящей книге эти исследования в релятивистской теории пульсирующих звезд подробно рассматриваться не будут (см., однако, разд. 19.5 и обзор [133]).

В гл. 5 рассматривается линейная теория звездных колебаний. Она сыграла первостепенную роль в развитии наших современных представлений о пульсирующих звездах. До недавнего времени эта теория служила основой почти всех теоретических исследований пульсирующих звезд, даже несмотря на тот хорошо известный факт, что пульсации реальных звезд имеют обычно достаточно большие амплитуды, чтобы определенную роль играли нелинейные эффекты. Тем не менее линейная теория оказывается чрезвычайно полезной отчасти потому, что ее относительная математическая простота облегчает понимание физических основ некоторых сложных явлений. Эта теория полезна еще и в том случае, если считать, что по крайней мере некоторые виды реальных звездных пульсаций возникли потому, что звезда когда-то была неустойчивой относительно бесконечно малых колебаний. То обстоятельство, что большинство общепризнанных типов пульсирующих звезд занимают более или менее четко ограниченные области диаграммы Герцшпрунга—Рессела (рис. 3.1), наводит на мысль о существовании некоторой связи между линейной неустойчивостью, зависящей (предположительно) от «статических» характеристик звезды, и реальными звездными колебаниями.

Часть II будет полностью посвящена чисто радиальным движениям, которым в настоящей книге уделяется значительное место. Существуют две главные причины такого выделения радиальных движений. Во-первых, это простейший вид движений в сферических звездах, он относительно легко поддается математической обработке, и многие из его аспектов можно понять физически. Во-вторых, большинство реальных пульсирующих звезд совершают, по-видимому, преимущественно именно такие простые колебания.

Часть III посвящена в основном теории иеррадиальных колебаний звезд.

В гл. 19 мы кратко рассмотрим или по крайней мере упомянем, дав соответствующие библиографические ссылки, некоторые усложняющие факторы в теории звездных пульсаций (радиальных и иеррадиальных), такие, как вращение, вязкость, магнитные поля, эффекты нарушения теплового равновесия и эффекты общей теории относительности. Будет упомянут также ряд смежных проблем, таких, как вековая устойчивость звезд, и будет сделано несколько замечаний о значении теории звездных колебаний для развития других областей астрофизики.

Обзоры, посвященные пульсирующим звездам и теории пульсаций, пред-

ставлены в работах Пейи-Гапошкной [424, 425], Леду и Вальравена [345], Леду и Уитни [346], Леду [336—339], Жевакина [639], Кристи [92, 94—98], Дж. Кокса [132, 133, 135, 136, 139], А. Кокса и Дж. Кокса [118], Кинга и Кокса [299], Кокса и Джули [146, Ch. 27], Ибеа [280], Хофмейстера [277], Перси [435], Глэсби [234] и в книге под редакцией Куаркина [315]. Более ранние обзоры даны в книгах Эддингтона [197, Ch. 8] и Росселанда [465]. Полезные сборники статей о пульсирующих звездах — труды Третьего colloquium MAC по переменным звездам (Бамберг, ФРГ, 1965) *The Position of Variable Stars on the H-R Diagram* (Положение переменных звезд на диаграмме Герцшпрунга — Рессела), труды Пятого colloquium MAC по переменным звездам (Бамберг, ФРГ, 1971) *New Directions and New Frontiers in Variable Star Research* (Новые направления и новые рубежи в исследовании переменных звезд), а также труды других многочисленных конференций [121, 167, 168, 214, 215, 218, 270, 306, 340, 443, 561]. Недавно Унно, Осаки, Андо и Сибакхаси опубликовали монографию [593] о иерархических колебаниях звезд.

Очень большую пользу принесли автору некоторые работы, посвященные волновым явлениям вообще. Возможно, они будут полезны и читателям. Это книги Морзе [386], Гринспизна [249], Толстого [581], Лайтхилла [351] и Мейна [358].

ГЛАВА 2

НЕКОТОРЫЕ ВАЖНЫЕ ХАРАКТЕРНЫЕ ВРЕМЕНА

В этой главе мы рассмотрим некоторые важные характерные времена для звезд и дадим грубые оценки порядков величин. Для пульсирующих звезд особый интерес представляют характерные времена в пределах от нескольких секунд до нескольких лет.

2.1. Период пульсаций

Первым и наиболее важным среди характерных времен для пульсирующих звезд является период пульсаций P в основной моде чисто радиальных колебаний. Хотя в последующих главах будут рассмотрены точные методы вычисления P , полезно сначала уделить внимание некоторым простым приближенным способам оценки этой величины, дающим почти такие же результаты, как и более сложные методы. По порядку величины это значение P пригодно и для иных акустических и гравитационных мод иерархических колебаний более или менее реалистичных звездных моделей (гл. 17).

Вероятно, самый общий из этих простых методов описан в [132]; он основан на том, что звездные пульсации (по крайней мере для низших мод) можно приближенно считать некоторым видом «длинноволновых» акустических колебаний (когда длина «звуковой волны» порядка или даже больше размеров системы), как это показано в [345, Sect. 60], см. также разд. 8.9 настоящей книги. Тогда период пульсаций должен быть порядка времени, необходимого звуковой волне для распространения вдоль среднего или равновесного диаметра звезды. Общее выражение для лапласовой (адиабатической) скорости

звука (разд. 5.5), усредненной некоторым подходящим образом по всей звезде в ее равновесном состоянии, можно получить из теоремы вириала (см., например, [146, Ch. 17]). Это выражение практически не зависит от свойств звездного вещества.

Грубый, но примерно эквивалентный метод вывода выражения для средней скорости звука состоит в следующем. Используется уравнение гидростатического равновесия (см., например, гл. 4), и все величины в нем рассматриваются как средние или характерные значения для всей звезды. Подставляя эти значения в выражение (5.38) для скорости звука, мы и получим желаемый результат.

Данный подход показывает очень приближенно, что $\bar{\rho}^{-1/2} = \text{const}$. А это — известное соотношение период — средняя плотность, которое представляется справедливым для большинства типов пульсирующих звезд (см., например, гл. 3). Согласно этому соотношению, чем больше размеры звезды, тем больше период пульсаций.

Из приведенных рассуждений следует также, что постоянная в этом соотношении содержит множитель $\Gamma_1^{-1/2}$, где Γ_1 — один из адиабатических показателей (гл. 4), принимаемый в данном случае постоянным. При более тщательном выводе обнаруживается, что следует взять множитель $(3\Gamma_1 - 4)^{-1/2}$, который обусловлен сферической симметрией задачи и изменениями ускорения силы тяжести, что не полностью учитывалось в приближенном рассмотрении. Тогда значение Π будет гораздо больше, чем дает прежнее выражение, если величина Γ_1 близка к $4/3$; это имеет место в релятивистских белых карликах, или нейтронных звездах, или в очень массивных звездах, где давление излучения оказывается больше газового. При $\Gamma_1 = 4/3$ $\Pi = \infty$, а при $\Gamma_1 < 4/3$ звезда динамически неустойчива.

Еще одно простое приближение для периода пульсаций звезды, в которое, кроме того, входит правильный множитель $(3\Gamma_1 - 4)^{-1/2}$, получают следующим образом. Предположим, что вся масса M звезды сконцентрирована в центре и что ее поверхность, находящаяся на среднем расстоянии R от центра, представляет собой тонкую сферическую оболочку массы m , малой по сравнению с M , причем оболочка несколько не препятствует изменениям своего радиуса, за исключением инерции (т.е. является идеально сжимаемой невязкой, и в ней отсутствует поверхностное натяжение). Весь объем внутри этой сферы заполнен однородным газом, не имеющим массы, единственная функция которого состоит в том, что он создает давление, препятствующее сжатию оболочки под действием сил тяготения, причем система находится в вакууме (давление $P = 0$). Если r — мгновенный радиус такой оболочки, то уравнение ее движения имеет вид:

$$m\ddot{r} = 4\pi r^2 P - GMm/r^2, \quad (2.1)$$

где точки обозначают производную по времени, P — давление газа внутри сферы (постоянное по всему объему), а G — гравитационная постоянная. Предположим теперь, что имеют место адиабатические колебания относительно равновесного состояния (характеризуемого соотношением $\dot{r} = 0$); т.е. примем, что $\delta P/P = \Gamma_1 \delta \rho/\rho$, где, например, δP — это отклонение давления от

равновесного значения. Линеаризуя уравнение (2.1) (подробное рассмотрение линеаризации см. в гл. 5) и предполагая зависимость от времени в виде $e^{i\sigma t}$, легко показать, что угловая частота пульсаций σ дается соотношением

$$\sigma^2 = (3\Gamma_1 - 4)GM/R^3 = (3\Gamma_1 - 4) \cdot \frac{1}{2}\pi G \bar{\rho}, \quad (2.2)$$

причем последнее равенство служит определением средней плотности $\bar{\rho}$. Отсюда получаем следующее выражение для периода пульсаций $\Pi = 2\pi/\sigma$:

$$\Pi = 2\pi / [(3\Gamma_1 - 4) \cdot \frac{1}{2}\pi G \bar{\rho}]^{1/2} \quad (2.3)$$

Любопытно, что величина Π из (2.3) совпадает с точным значением периода основной моды чисто радиальных пульсаций однородной модели (т.е. модели с постоянной по всему объему плотностью) с заданными значениями Γ_1 и $\bar{\rho}$.

Тщательно проследивая вывод уравнения (2.2), легко понять происхождение «магического» критического числа $4/3$ (см. выше замечание относительно динамической неустойчивости). Запишем это число как $(2 + 2)/3$. Одна из двоек обусловлена тем, что ньютоновская сила тяготения обратно пропорциональна квадрату расстояния (если не оговорено специально, то мы в данной книге рассматриваем только такую зависимость); другая — тем, что суммарная сила давления, действующая на сферу радиуса r , пропорциональна r^2 . А тройка связана с трехмерностью физического пространства: объем сферы радиуса r пропорционален r^3 .

Соотношение период — средняя плотность обычно записывают в виде

$$\Pi(\bar{\rho}/\bar{\rho}_\odot)^{1/2} = Q, \quad (2.4)$$

где $Q \propto (G\bar{\rho}_\odot)^{-1/2}$ — «пульсационная постоянная» ($\bar{\rho}_\odot = 1,41 \text{ г/см}^3$ — средняя плотность Солнца). В действительности величина Q не является постоянной, ее значение зависит, хотя обычно лишь слабо, от величины Γ_1 и от внутреннего строения звезды. Точные расчеты показывают, что для основной радиальной моды при $\Gamma_1 = 5/3$

$$0,03 \leq Q \leq 0,12 \text{ сут}, \quad (2.5)$$

причем типичным является значение $Q \approx 0,04$ сут. В работах [151, 207] приведены интерполяционные формулы, дающие Q как функцию звездных параметров (прежде всего массы и равновесного радиуса). Величина Q равна периоду пульсаций Солнца: если бы оно пульсировало в основной моде радиальных колебаний, то период составлял бы около часа. Наблюдения большого числа переменных звезд (сами по себе достаточно неуверенные!) дают значение Q в пределах

$$0,02 \leq Q \leq 0,11 \text{ сут} \quad (2.6)$$

в разумном согласии с теорией.

На основе соотношения период — средняя плотность (2.4) можно оценить ожидаемые периоды пульсаций известных типов звезд. Рассматривая звезды со средними плотностями от значений для умеренно плотных белых карликов, $\bar{\rho} \sim 10^6 \text{ г/см}^3$, до значений для разреженных красных сверхгигантов,

$\bar{\rho} \sim 10^{-9} \text{ г/см}^3$, получаем, что периоды приблизительно заключены в пределах

$$3 \leq \Pi \leq 1000 \text{ сут}, \quad (2.7)$$

и эти пределы хорошо соответствуют диапазону наблюдаемых периодов большинства типов периодических, или циклических, физических переменных звезд (гл. 3). Такое согласие служит хорошим общим подтверждением теории пульсаций переменных звезд. Существуют и более сильные конкретные доводы в пользу этой теории, но они, однако, выходят за рамки настоящей книги (см., например, [197, Ch. 8]). Можно отметить, что если в указанную выборку включить и нейтронные звезды (которые мы, вероятно, наблюдаем как пульсары) со средними плотностями $\bar{\rho} \sim 10^{15} \text{ г/см}^3$, то нижний предел диапазона периодов составит несколько миллисекунд. Хотя пока нет никакого прямого свидетельства, что нейтронные звезды пульсируют, некоторые тонкие детали, наблюдаемые в переменном радионизлучении пульсаров и имеющие характерное время порядка нескольких миллисекунд (см., например, [568]), вполне могут быть следствием пульсаций.

2.2. Время свободного падения

Время свободного падения, или динамическое время t_{ff} — это характерное время, связанное с динамическим коллапсом объекта или с орбитальным движением спутника на очень близком расстоянии от поверхности звезды; величина t_{ff} — это также характерное время, за которое значительные отклонения от гидростатического равновесия приводят к заметному изменению состояния звезды.

Простую оценку t_{ff} по порядку величины можно получить, вычисляя время, необходимое свободно падающему телу единичной массы для прохождения расстояния порядка R (радиуса звезды) под действием постоянного ускорения силы тяжести, равного ускорению силы тяжести на поверхности звезды, GM/R^2 :

$$t_{ff} \sim (G\bar{\rho})^{-1/2} \quad (2.8)$$

(другие приближенные способы оценки t_{ff} приведены, например, в [146, Ch. 1]). Выражение (2.8) показывает, что, за исключением численных множителей, которые обычно порядка единицы, величина t_{ff} сравнима с периодом пульсаций Π . Этот хорошо известный результат является следствием того, что характерные скорости, связанные с низшими модами преимущественно радиальных пульсаций (т.е. скорость звука) и с динамическими процессами (например, скорости свободного падения или орбитального движения) или с низшими модами нерадиальных гравитационных колебаний, — все они определяются в основном гравитационной энергией звезды (через теорему вириала).

2.3. Кельвиновское время

Кельвиновское время t_K — это, по существу, «время релаксации» звезды, выведенной из состояния *теплового* равновесия, т.е. из состояния баланса меж-

ду выделением энергии в термоядерных реакциях в звездных недрах и ее потерями через поверхность звезды посредством излучения в виде фотонов и нейтрино. Порядок величины t_K можно оценить следующим образом. Пусть E_{th} — полная внутренняя (тепловая) энергия звезды, а L — ее светимость (суммарная скорость потерь энергии через поверхность). Тогда с точностью до порядка величины имеем

$$t_K \sim E_{th}/L. \quad (2.9)$$

Однако величину E_{th} с помощью теоремы вириала можно связать с гравитационной энергией звезды Ω . Для самогравитирующей системы, в которой нет никаких движений вещества (например, турбулентности, вращения, пульсаций), никаких магнитных полей и которая находится в гидростатическом равновесии, причем давление на ее поверхности обращается в нуль, теорему вириала можно записать в следующем общем виде:

$$3 \int_V PdV = -\Omega, \quad (2.10)$$

где P — полное давление, а интегрирование проводится по всему объему V звезды. Величина Ω — это гравитационная потенциальная энергия сферической звезды, определяемая как

$$\Omega = - \int_M (Gm/r) dm = -qGM^2/R. \quad (2.11)$$

Здесь q — безразмерная постоянная, значение которой зависит от концентрации вещества к центру, для химически однородных звезд $q \sim 1$; интегрирование проводится по полной звездной массе M . Если предположить, что давление создается идеальным нерелятивистским газом, то имеем $E_{th} = \frac{1}{2} \int_V PdV$, откуда вытекает простая форма теоремы вириала $E_{th} = -\Omega/2$. Подставляя этот результат в соотношение (2.9), учитывая выражение (2.11) для Ω и принимая $q \approx 3/2$, получаем

$$t_K \sim \frac{1}{4} GM^2/(LR) \sim 2 \cdot 10^7 M^2/(LR) \text{ лет}, \quad (2.12)$$

где величины L , R и M взяты в солнечных единицах. Кельвиновское время t_K — это такое же время, которое потребовалось бы звезде, чтобы сжаться от бесконечных размеров до ее современного радиуса, если бы в течение всего сжатия светимость L оставалась постоянной.

Кельвиновское время обычно не связано непосредственно с периодом пульсирующих звезд, однако, как мы увидим в гл. 9, оно имеет отношение к характерным временам нарастания или затухания пульсаций.

Полезной безразмерной величиной является отношение времени свободного падения (порядка периода пульсаций) к кельвиновскому времени:

$$t_{ff}/t_K \sim \Pi/t_K \sim LR^{3/2}/(G^{1/2}M^{1/2}) \sim 10^{-12} LR^{3/2}/M^{1/2}, \quad (2.13)$$

где L , M и R — в солнечных единицах. Отсюда следует, что для звезд, не слишком отличающихся от Солнца, период пульсаций на много порядков величины меньше кельвиновского времени.

2.4. Ядерное время

Ядерное характерное время $t_{\text{я}}^{\text{яд}}$ представляет лишь косвенный интерес для теории пульсирующих звезд, но его все же полезно знать для общего представления. В широком смысле это время, необходимое для заметного изменения свойств звезды в результате термоядерной эволюции (т.е. в результате изменения химического состава под действием ядерных превращений). Для звезды, в которой происходит горение водорода, ядерное время можно определить исходя из того, что при превращении одного грамма водорода в гелий освобождается энергия $\approx 0,007 c^2 \approx 6 \cdot 10^{18}$ эрг (c — скорость света). Предполагая, что синтез гелия может протекать в $\sim 10\%$ массы звезды, получаем

$$t_{\text{я}}^{\text{яд}} \sim 10^{10} M/L \text{ лет}, \quad (2.14)$$

где M и L выражены в солнечных единицах. Легко видеть, что обычно

$$t_{\text{я}}^{\text{яд}} \sim 10^3 t_K.$$

ГЛАВА 3

НЕКОТОРЫЕ ДАННЫЕ НАБЛЮДЕНИЙ

В этой главе мы кратко рассмотрим ряд вопросов, связанных с переменными звездами и представляющих интерес преимущественно с точки зрения наблюдений. Дополнительные сведения о наблюдаемых характеристиках разнообразных типов переменных звезд всесторонне и детально рассматриваются, например, в работах [277, 315, 319, 345, 424, 425, 428, 433, 561] и в некоторых других исследованиях, упомянутых в гл. 1. См. также краткий обзор в [133]. Вследствие огромного числа работ на эту тему и большого числа новых открытий мы здесь не претендуем на полноту представления новейших результатов. Интересующемуся читателю советуем просмотреть текущую астрономическую и астрофизическую литературу. К пульсирующим переменным мы не относим *спектральные* и *магнитные* переменные (см., например, [342]), *вспыхивающие* звезды типа UV Кита (см., например, [353]), звезды типа Т Тельца (см., например, [264, 265]), поскольку неясно, имеют ли их характеристики непосредственное отношение к пульсациям. Мы не рассматриваем и квазизвездные объекты (по причинам, указанным выше; гл. 1), а также пульсары, поскольку их основные наблюдаемые свойства обусловлены, по общему мнению, вращением, а не пульсациями (см., например, [60, 63, 267, 471]). Не рассматриваем мы и недавно обнаруженные колебания некоторых катаклизмических переменных (см., например, [423, 455, 551, 614, 615, 617]), так как природа и причина этих колебаний не известны. Часть материала настоящей главы является извлечением из обзора [133].

В табл. 3.1 суммированы некоторые свойства наиболее известных типов пульсирующих переменных. На рис. 3.1 показано положение некоторых из этих звезд, а также ряда других на диаграмме Герцшпрунга — Рассела *.

* Необходимые сведения об астрономической терминологии, а также другую информацию можно найти в любом общем курсе астрофизики, например в [16, 261, 462, 528, 564, 595].



рис. 3.1. Положение физических переменных звезд различных типов на диаграмме Герцшпрунга — Рассела [133, Fig. 1]. (С разрешения Института физики.)

Классические цефеиды и звезды типа W Девы иногда объединяют общим названием «цефеиды», рассматривая обе группы как аналоги, относящиеся к разным звездным населением. Красные полуправильные переменные и долгопериодические переменные иногда объединяют общим названием «красные переменные».

Группу звезд в верхней части табл. 3.1 (переменные типа RR Лиры, цефеиды, звезды типа RV Тельца и красные переменные) иногда называют «большой последовательностью переменных звезд». Отметим, что при переходе в этой части таблицы от одних звезд к другим периоды постепенно увеличиваются, а спектральные классы становятся все более поздними (звезды становятся холоднее).

Легко показать, что как раз такую общую корреляцию между периодом и спектральным классом (или цветом) и следует ожидать в случае радиальных пульсаций. Мы можем полагать, что звезды больших размеров имеют и относительно большие периоды (поскольку время прохождения звуковой волны вдоль диаметра такой звезды велико); а при заданной светимости такие звезды относительно холодны. Поэтому, чем больше периоды, тем ниже температуры пульсирующих звезд.

Особенность почти вертикальной овальной области, обведенной на рис. 3.1 штриховой линией, состоит в том, что неустойчивость большинства лежащих в этой области звезд (переменные типа RR Лиры, классические цефеиды, переменные типа W Девы, карликовые цефеиды и переменные типа δ Щита) обусловлена, как считают, действием общего физического механизма (вторая ионизация гелия в звездной оболочке), который будет довольно под-

ТАБЛИЦА 3.1

Пульсирующие переменные

(По данным табл. 1 из обзора [133], с любезного согласия Института физики.)

Тип звезд	Диапазон периодов	Характерный период	Население	Диапазон спектральных классов	M_V
RR Лиры	1,5 — 24 ч	0,5 сут	II	A2 — F2	От 0,0 до 1,0 ^m
Классические цефеиды	1 — 50 сут	5 — 10 сут	I	F6 — K2	От -0,5 до -6 ^m
W Девы	2 — 45 сут	12 — 20 сут	II	F2 — G6 (?)	От 0 до -3 ^m
RV Тельца	20 — 150 сут	75 сут	II	G, K	$\approx -3^m$
Красные полуправильные переменные	100 — 200 сут	100 сут	I и II	(K), M, R, N, S	От -1 до -3 ^m
Долгопериодические переменные	100 — 700 сут	270 сут	I и II	M_e, R_e, N_e, S_e	От +1 до -2 ^m
Типа β Цефея (β Большого Пса)	4 — 6 ч	5 ч	I	B1 — B2	От -3,5 до -4,5 ^m
Карликовые цефеиды и переменные типа δ Щита	1 — 3 ч	2 ч	I	A2 — F5	От +2 до +3 ^m
Цефеиды с биениями (двуперриодические цефеиды)	1 — 7 сут	2 сут	I (?)	F0 — G0 (?)	От -1 до -3 ^m (?)
Переменные белые карлики (звезды типа ZZ Кита)	200 — 1000 с	500 с (?)	I (?)	A5 — F5 (?)	От +10 до +15 ^m (?)

робно рассмотрели в гл. 10. Эту овальную область иногда называют полосой неустойчивости или областью неустойчивости. Высказано предположение [253, 392, 604], что данная область неустойчивости может простирается даже до переменных белых карликов (или звезд типа ZZ Кита; см. ниже). Однако см. [147].

В работах [52, 366, 441] представлен современный обзор свойств некоторых типов короткопериодических переменных.

Если рассмотреть распределение пульсирующих переменных в Галактике по периодам и учесть эффекты селекции, то при значениях периодов, характерных для различных типов звезд, собранных в табл. 3.1, обнаруживаются более или менее выраженные пики (см., например, [425, р. 17]). Это свидетельствует о том, что классификация пульсирующих звезд на отдельные типы имеет некоторую реальную основу.

Наиболее многочисленным видом пульсирующих переменных, если сравнивать число звезд в единице объема пространства (пространственную плотность), оказываются, по крайней мере в окрестностях Солнца, недавно открытые переменные белые карлики («звезды типа ZZ Кита», [363, 392]). Их число, по-видимому, значительно превышает число переменных звезд всех других типов (быть может, даже более чем в сто раз).

3.1. Классические цефеиды и соотношение период — светимость

Благодаря важности классических цефеид и их роли в установлении фундаментальной шкалы расстояний во Вселенной (с помощью известного соотношения период — светимость) мы посвящаем этому типу переменных отдельный раздел.

Типичным объектом этой группы является звезда δ Цефея с периодом 5,366 сут [316–318]. Еще одна классическая цефеида — Полярная звезда, хотя колебания ее блеска малы ($< 0,1^m$). Классические цефеиды — это желтые гиганты и сверхгиганты, имеющие высокую светимость (табл. 3.2) и видимые поэтому на больших расстояниях, если не мешает межзвездное поглощение. Классические цефеиды обнаружены примерно в 30 других галактиках.

Периоды почти всех классических цефеид заключены в диапазоне от 1 до 50 сут, но несколько цефеид в Большом Магеллановом Облаке имеют периоды, достигающие 100 сут, а в Малом Магеллановом Облаке — даже 200 сут [429]. В нашей Галактике классическая цефеида с наибольшим периодом — это звезда BP Геркулеса, ее период равен 83,1 сут [359].

Согласно [431], в нашей Галактике известно около 700 классических цефеид, и все они расположены вблизи галактической плоскости и участвуют во вращении Галактики. Это объекты экстремального населения I. Вследствие близости звезд к галактической плоскости приходящее от них излучение сильно ослаблено из-за поглощения межзвездной пылью и испытывает сильное покраснение. Все эти звезды слишком далеки, чтобы можно было измерить их расстояния обычными прямыми методами (например, методом тригонометрических параллакс). Поэтому до недавнего времени расстояния до це-

феид определялись только статистическими методами, основанными на закономерностях движения Солища относительно близких звезд. Такие методы не всегда дают очень точные или надежные результаты. Однако начиная с середины 50-х годов удалось открыть около 13 классических цефеид в рассеянных скоплениях (история их открытия описана в [210]). Это позволило более точно определить расстояния до цефеид (см., например, [231, 310, 433, 479, 480, 483, 484, 489] и ссылки в [484]), а значит, и нуль-пункт соотношения период — светимость (см. ниже).

Некоторые свойства классических цефеид в Галактике суммированы в табл. 3.2 (заимствованной из [133]). Приведенные значения масс — это только оценки, основанные на расчетах звездной эволюции для моделей с обычными массами. Данные оценки, возможно, указывают лишь верхние пределы, поскольку массы реальных цефеид могут быть несколько меньше, чем следует из эволюционных расчетов (разд. 19.7). К сожалению, ни для одной из цефеид нет надежной эмпирической оценки массы, поскольку большинство этих звезд либо одиночные, либо компоненты настолько широких двойных систем, что надежно определить элементы орбит, а следовательно, и массы невозможно (см., например, [2, 325]).

ТАБЛИЦА 3.2
Свойства классических цефеид в Галактике

Параметр	Диапазон
Период P	От 1 до 50 сут
Средняя светимость L	От 300 до $26000 L_{\odot}$
Средний спектральный класс	От F5 до G5
Средний радиус R	От 14 до $200 R_{\odot}$
Масса M	От $\approx 3,7$ до $\approx 14 M_{\odot}$

Кривые блеска классических цефеид асимметричны и имеют очень правильную периодичность, точно повторяясь на протяжении многих периодов (рис. 3.2). Амплитуда изменений блеска (в видимом свете) составляет около 1^m , она медленно и несколько нерегулярно возрастает с увеличением периодов.

Форма кривых блеска коррелирует со значениями периодов. Эта корреляция, называемая *зависимостью Герцшпрунга*, показана, например, в [133, Fig. 4] (этот же рисунок можно найти в [424]). (Более подробное обсуждение зависимости Герцшпрунга см., например, в [427, 430].) Отметим, что при периодах между 7 и 9 сут на нисходящей ветви кривой блеска часто появляется вторичный максимум. Следует указать, однако, что зависимость Герцшпрунга носит статистический характер и поэтому имеется много исключений (см., например, [133, Fig. 5]).

Спектральные классы и цвета цефеид также изменяются при колебаниях блеска. В максимуме блеска спектральные классы самые ранние (т.е. ближе

всего к высокотемпературному концу спектральной последовательности), и изменения спектра согласуются с изменениями цвета. Например, спектральный класс δ Цефея изменяется в течение периода от F5 до G2 [316]; такое изменение соответствует общему изменению эффективной температуры приблизительно на 1500 К. Большая часть колебаний блеска обусловлена как раз вариациями температуры, а изменения радиуса сравнительно невелики (относительная полуамплитуда составляет около 0,05 – 0,10, см., например, [394]) и оказывают лишь незначительное влияние на кривые блеска.

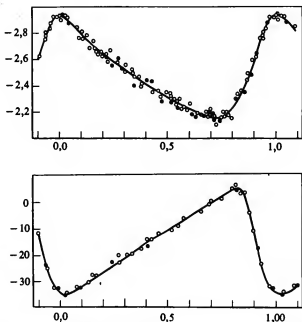


рис. 3.2. Кривые блеска (вверху) и лучевых скоростей (внизу) для звезды δ Цефея. Абсцисса — фаза; ордината для кривой блеска — видимая звездная величина (нуль-пункт произвольный). Лучевая скорость выражена в км/с и приведена без учета скорости движения центра масс звезды относительно Солнца, равной -16 км/с (знак скорости берется в соответствии с обычными астрономическими правилами) [236].

Кривые лучевых скоростей классических цефеид являются приблизительно зеркальным отражением кривых блеска (если использовать обычные астрономические правила для знака лучевой скорости), что и показано на рис. 3.2 [133]. Если кривая лучевых скоростей отображает движение звездной поверхности, то фазовое соотношение между изменениями блеска и лучевой скорости означает, что звезда наиболее яркая тогда, когда она, расширяясь, достигает равновесного радиуса, а не тогда, когда ее радиус наименьший, как можно было бы ожидать из примитивных рассуждений. Это отставание фазы

максимального блеска относительно фазы минимального радиуса было названо «фазовым запаздыванием». Фазовое запаздывание максимума светимости относительно минимума радиуса составляло бы около 90° , если бы кривые блеска и лучевой скорости были синусоидальными. Однако из-за асимметрии кривых фазовое запаздывание значительно меньше и составляет, по-видимому, 0,1–0,2 периода. Физическая природа фазового запаздывания проявилась в последние годы и будет рассмотрена в гл. 11.

Амплитуда изменений лучевых скоростей обычно составляет 30–40 км/с, причем она медленно и нерегулярно увеличивается с ростом периода, достигая около 50–60 км/с для $\Pi \approx 30$ –40 сут. Отметим, что из-за эффектов проекции и потемнения к краю истинные амплитуды изменений радиальной скорости больше приведенных значений, и последние следует умножить на некоторый коэффициент, обычно принимаемый равным 24/17 (разд. 3.4).

Пожалуй, наиболее важная роль классических цефеид в астрономии заключается в их использовании как эффективных индикаторов расстояний; эти звезды все еще обеспечивают наиболее надежный метод построения фундаментальной шкалы расстояний во Вселенной [478, 481]. Их использование основано на хорошо известном соотношении период—светимость, которое было открыто в 1912 г. Ливитт при изучении цефеид Малого Магелланова Облака [445]. Ливитт установила, что средняя светимость монотонно возрастает с

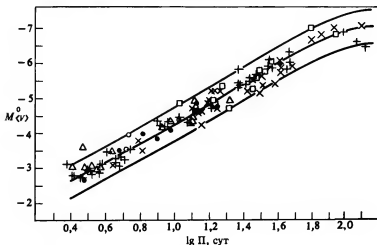


рис. 3.3. Комбинированное соотношение период — светимость Сэндейджа и Таммана [479]. Соотношение основано на данных о цефеидах в нашей и других галактиках. (С любезного согласия редакции «Астрофизикел Джорнел» и авторов.) Черные кружки — цефеиды рассеянных скоплений, белые кружки — δ и χ Персея, прямые крестики — Большое Магелланово Облако, косые крестики — Малое Магелланово Облако, треугольники — туманность Андромеды M31, квадратики — галактика NGC 6822.

увеличением периода, однако ей не удалось определить нуль-пункт данной зависимости. История определения этого нуль-пункта представляет захватывающую главу в истории астрономии, она описана в работах [27, 28, 210]. Достаточно сказать, что исправление ошибки в первых определениях нуль-пункта, обнаруженной Бааде в начале 1950-х годов с помощью вступившего в строй 5-метрового Паломарского телескопа, привело к «удвоению» размеров Вселенной: эта ошибка оставалась необнаруженной в течение почти сорока лет! Проблема нуль-пункта, несомненно, является одной из самых основных проблем наблюдательной астрофизики из-за ее важности для установления шкалы астрономических расстояний.

Современный анализ эмпирического соотношения период-светимость представлен в работах [208, 229, 231, 433, 479, 480, 482–484, 489, 601]. На рис. 3.3 [133] показано соотношение период-светимость Сэидейджа и Таммана [479]. Приведенная зависимость является комбинированной, она основана на данных о цефеидах как нашей, так и других галактик. Авторы пришли к выводу, что нет никаких оснований сомневаться в существовании «универсального» соотношения период – светимость по крайней мере для изученных ими галактик. Однако вопрос об универсальности такого соотношения, по-видимому, еще нельзя считать окончательно решенным (см., например, [210, 230]).

Хотя соотношение период – светимость Сэидейджа и Таммана нелинейное, отклонения от линейности довольно малы. Линию в центре полосы, показанной на рис. 3.3, можно почти по всей ее длине с достаточной точностью представить следующим соотношением:

$$M_{\langle V \rangle}^0 = -2,80 \lg \Pi_d - 1,43 \quad (0,4 \leq \lg \Pi_d \leq 1,7), \quad (3.1)$$

где индекс $\langle V \rangle$ означает «среднее по периоду», а верхний индекс нуль указывает, что абсолютные величины исправлены на межзвездное покраснение и поглощение. Периоды выражены в сутках, что отмечено индексом d . Используя полученную Крафтом [310] зависимость между $M_{\langle V \rangle}$, показателем цвета $(B - V)$, T_e и M_{bol} , соотношение (3.1) можно представить еще и в следующем виде:

$$\lg(L/L_{\odot}) = 1,15 \lg \Pi_d + 2,47 \quad (0,4 \leq \lg \Pi_d \leq 1,7). \quad (3.2)$$

Разброс точек относительно центральной линии на рис. 3.3, вероятно, в большинстве случаев реальный и связан с конечной шириной области неустойчивости, а также, возможно, с наличием звезд, пульсирующих в различных модах (см. гл. 10 и разд. 19.7). Для фиксированного периода полная реальная ширина зависимости период – светимость составляет приблизительно 1^m .

По-видимому, существуют определенные различия между цефеидами в Галактике и в Магеллановых Облаках. Пожалуй, наиболее сильными являются различия в распределении цефеид в этих системах по периодам. Так, например, в Малом Магеллановом Облаке есть много цефеид с $\Pi \leq 3$ сут, тогда как в Галактике известно лишь несколько цефеид с такими короткими пе-

риодами. В этом отношении цефеиды Большого Магелланова Облака занимают промежуточное положение (см., например, сводку данных в статье [278]).

3.2. Новые типы переменных звезд

Кроме типов переменных звезд, упомянутых выше, значительное внимание в астрономической и астрофизической литературе было уделено в последнее время еще по крайней мере трем типам. Кроме того, благодаря новым открытиям число известных объектов заметно возросло. Поэтому мы дадим здесь краткое описание этих типов и приведем некоторые библиографические ссылки.

3.2а. БЫСТРЫЕ ГОЛУБЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Быстрые голубые переменные — это довольно широкий класс сравнительно голубых объектов с очень короткопериодическими изменениями блеска. Изменения блеска большей частью весьма неправильные и напоминают «мерцания». Периоды колебаний блеска составляют от нескольких десятков до нескольких сотен секунд. Данные наблюдений этих объектов суммированы в работах [53, 392, 410, 423, 456–458, 551, 615–617]. В большинстве своем эти объекты, по-видимому, — либо карликовые новы (которые, как считают, являются тесными двойными, см., например, [311, 312, 423, 614]), либо переменные белые карлики [253, 364, 365, 392, 451, 456–458, 604]. Как отметил Мак-Гро [363], переменные белые карлики представляют наиболее многочисленную группу переменных звезд, и этот новый класс он назвал «звездами типа ZZ Кита». Природа нескольких быстрых голубых переменных, которые не входят ни в одну из упомянутых групп, остается невыясненной [43, 321]. Например, одним из возможных объяснений может быть быстрое вращение этих объектов [266, 321].

Согласно [363, 392], в настоящее время известны 12 переменных белых карликов с периодами преимущественно в диапазоне 200–1000 с, причем по остальным характеристикам это обычные белые карлики типа DA с показателями цвета в области $0,16 \leq B - V \leq 0,20^m$ (т.е. с эффективными температурами $\sim 10^4$ K). Дополнительные сведения об этих звездах можно найти в [147, 253, 363, 392, 604] и в некоторых из работ, цитированных выше.

3.2б. ЦЕФЕИДЫ С БИЕНИЯМИ

Цефеиды с биениями (или двупериодические цефеиды; возможно, их вообще нельзя относить к цефеидам) образуют небольшую группу звезд, кривые блеска которых не являются периодическими (в настоящее время известны 11 таких звезд [557]). Тем не менее эти кривые блеска удастся разложить, по существу, на две (в одном или двух случаях — на три) периодические кривые. Сложение двух таких кривых вновь дает первоначальную наблюдаемую непе-

риодическую кривую блеска. Предполагают, что оба периодических процесса представляют собой две различные моды пульсаций, которые соответствуют, как считают обычно, радиальным колебаниям в основной моде и первой гармонике, а если выделяется еще один период, то и во второй гармонике. Очевидно, что по какой-то причине в рассматриваемых звездах одновременно возбуждены все эти моды, которые взаимодействуют друг с другом и поэтому вызывают «бисения». Наибольший из периодов обычно составляет от 2 до 7 сут, следующий — около 70% от него, а третий, если он имеется, — около 80% от второго. Быть может, важно то, что отношение второго периода к первому ни в одном случае не выходит за пределы 0,70—0,71 [519, 557]. На диаграмме Герцшпрунга — Рассела эти звезды лежат в нижней части полосы неустойчивости цефеид (вытянутая овальная область на рис. 3.1). Именно по этой причине их называют «цефеидами». Согласно [557], в нашей Галактике приблизительно половина переменных с соответствующими периодами является цефеидами с бисениями.

Мультипериодичность этих звезд позволяет получить важную информацию о рассматриваемых объектах и о некоторых свойствах звездных пульсаций вообще. Дело в том, что для заданной моды период определяется в основном массой и радиусом звезды (см., например, [103, 151]). Цефеидам с бисениями посвящены работы [104—106, 114, 119, 122, 124, 206, 207, 217, 220, 301, 438, 439, 442, 460, 477, 494, 555, 556, 558]; см. также обзорные статьи [115, 138, 139] и ссылки в них.

3.2в. ЗВЕЗДЫ КЛАССА В С ПЕРЕМЕННЫМИ ПРОФИЛЯМИ ЛИНИЙ

Эти звезды, названные М.Смитом [533, 534] «звездами типа 53 Персея», в основном находятся на главной последовательности или вблизи нее и имеют ранние спектральные классы, скажем от O8 до B5. Однако некоторые из этих звезд являются гигантами или сверхгигантами и занимают часть диаграммы Герцшпрунга — Рассела вокруг и в окрестности звезд типа β Цефея. Звезды класса В с переменными профилями линий довольно многочисленны, к этой группе относятся, вероятно, большинство звезд в соответствующей области диаграммы Герцшпрунга — Рассела [533].

У этих звезд обнаруживаются изменения профилей спектральных линий со временем, происходящие более или менее периодическим образом, и периоды обычно составляют от нескольких часов до приблизительно 2 сут (характерное значение 0,5 сут). Изменения профилей спектральных линий можно объяснить нерадиальными колебаниями, в частности g -модами [531—534, 536, 537] (см. терминологию в гл. 17). Имеется свидетельство довольно частых изменений характера колебаний, причем определенный тип колебаний сохраняется, как правило, примерно в течение месяца [534].

У нескольких звезд этого типа были обнаружены также колебания блеска порядка $0,1^m$ [59, 535]. В работе [59] проведено и довольно изысканное рассмотрение изменений блеска, сопровождающих нерадиальные звездные колебания (см. также [191]).

3.3. Эмпирическое определение радиусов пульсирующих звезд

Большинство эмпирических методов определения радиусов радиально пульсирующих звезд базируется, по существу, на методе, разработанном Бааде [25] и Весселинком [619, 620]. Суть метода заключается в следующем. Если F_p — поток, излучаемый в некоторой спектральной полосе шириной обычно $\sim 700 - 1000 \text{ \AA}$ (т.е. интенсивность излучения энергии с единицы площади поверхности), а L_p — светимость звезды в этой области спектра, то для каждого момента времени существует простая зависимость между F_p , L_p и мгновенным радиальным расстоянием R того эффективного уровня в атмосфере, на котором возникает излучение в заданной области спектра (R приблизительно равно мгновенному радиусу звезды). Самое существенное предположение, лежащее в основе метода Весселинка, состоит в том, что для данной звезды поток F_p считается зависящим только от цвета звезды, характеризующегося показателем цвета $B - V$. Здесь B и V — это исправленные на межзвездное покраснение видимые звездные величины в широких спектральных областях с центрами соответственно в голубой и визуальной (желто-зеленой) областях спектра. Если теперь выбрать две фазы в цикле пульсаций, скажем, для моментов t_1 и t_2 , когда цвет звезды одинаков, т.е. $(B - V)_1 = (B - V)_2$, то, согласно основному предположению, $F_p(t_1) = F_p(t_2)$. А отсюда следует, что

$$L_1/L_2 = (R_1/R_2)^2, \quad (3.3)$$

где индексы 1 и 2 соответствуют моментам t_1 и t_2 . Таким образом, измерение относительного блеска звезды в двух фазах, когда цвет одинаков, дает оценку отношения радиусов звезды для двух моментов времени.

С другой стороны, если известна кривая лучевых скоростей, то скорость движения звездной поверхности, скажем $\dot{R}(t)$, относительно центра масс звезды можно получить сразу после того, как выбран поправочный множитель p для перехода от наблюдаемой лучевой скорости $V(t)$ (относительно центра масс) к $\dot{R}(t)$:

$$\dot{R}(t) = -pV(t). \quad (3.4)$$

Предполагая, что средний уровень в атмосфере, соответствующий кривой лучевых скоростей, совпадает со средним уровнем, на котором формируется поток выходящего излучения, легко найти разность $R_2 - R_1$, проинтегрировав кривую лучевых скоростей от момента t_1 до момента t_2 .

А зная разность $R_2 - R_1$ и отношение R_1/R_2 , легко определить и сами величины R_1 и R_2 . Повторяя эту процедуру для всего периода, можно найти $R(t)$, откуда определяется средний радиус R .

Метод Весселинка многократно применялся, обсуждался и уточнялся, мы приведем здесь лишь несколько сравнительно новых ссылок [95, 116, 120, 205, 209, 268, 291, 400, 401, 421, 422, 459, 493]; см. также библиографию в [209]. Рассмотрение других методов определения радиусов пульсирующих звезд можно найти, например, в работах [105, 420, 421].

Проведенные исследования показывают, что предположения, лежащие в основе обычного метода Весселинга, по-видимому, не всегда строго выполняются [493]. Различные методы определения радиуса дают, как правило, различные результаты. Очевидно, что радиусы пульсирующих звезд известны довольно плохо, скажем с точностью не выше 10 или 20% (см., например, [105, 151]). С нетерпением ожидаются предстоящие прямые интерферометрические измерения углового диаметра цефеид, см. [250].

Применение метода Весселинга к звездам, испытывающим иерархические колебания, рассматривается в работе [40].

3.4. Потемнение к краю и скорость радиального расширения звезды

Изменения лучевой скорости, определяемые по доплеровскому смещению спектральных линий, в силу ряда причин не дают прямой информации об истинной скорости расширения или сжатия поверхности пульсирующей звезды. Наиболее важная поправка, которую необходимо внести, чтобы на основе наблюдаемых доплеровских смещений определить истинную скорость движения звездной поверхности относительно центра масс звезды, заключается в учете эффектов проекции и потемнения к краю. Эти эффекты, а также дифференциальные движения слоев в тех областях конечной толщины, где образуются линии поглощения, как правило, вносят асимметрию в наблюдаемые профили линий и поэтому могут влиять на положение «центра тяжести» линии, а потому и на наблюдаемую лучевую скорость. Мы рассмотрим здесь только эффекты проекции и потемнения к краю, предполагая, что излучающая область ведет себя по крайней мере с кинематической точки зрения как некоторая твердая сферическая поверхность, реальная скорость движения которой относительно центра масс звезды равна $V = \dot{R}$ (величина V здесь иная, чем в разд. 3.3). Влияние дифференциальных движений в излучающих областях на профили линий исследовано, например, в работах [186, 291, 373].

Будем предполагать, что «центр тяжести» спектральной линии соответствует среднему значению, взятому по видимому звездному диску, от скорости вдоль луча зрения: $V_r = V \cos \theta$, где V — истинная радиальная скорость излучающей области, а θ — угол между вектором \mathbf{V} и лучом зрения. При нахождении среднего значения необходимо учесть функцию потемнения к краю $\phi(\theta)$. Эту функцию выбирают таким образом, что $\phi(\theta) = 1$ при $\theta = 0$, а с увеличением θ ее значения убывают. Принимая

$$\phi(\theta) = 1 - k + k \cos \theta \quad (k \leq 1), \quad (3.5)$$

мы легко получаем

$$\bar{V}_r = V \cdot (4 - k) / (6 - 2k). \quad (3.6)$$

Для $k = 0, \frac{1}{2}$ и 1 имеем соответственно $\bar{V}_r / V = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$. Эти три значения k соответствуют отсутствию потемнения к краю, потемнению, предсказываемому простой серой атмосферой в приближении Эддингтона (см., например, [372, 629]), и полному потемнению к краю. Очевидно, что закон

потемнения к краю не слишком влияет на значение \bar{V}_r/V , по крайней мере в принятой нами простой модели. Данное обстоятельство и объясняет, почему для величины $p = V/\bar{V}_r$ (разд. 3.3) обычно используют значение 24/17. Оценки p , полученные на основе более сложных моделей, приведены, например, в работах [116, 291, 420, 421]; но эти более точные значения незначительно отличаются от полученных в простых моделях, упомянутых выше (например, согласно [420], значение p равно 24/17,5).

Можно отметить, что поскольку разные спектральные области в общем случае дают различное потемнение к краю, то уже по одной этой причине различные линии могут дать несовпадающие лучевые скорости. Дифференциальные движения излучающих слоев также могут вызвать расхождения в наблюдаемых лучевых скоростях, определяемых по различным спектральным линиям (например, по сильным и слабым линиям, образующимся соответственно в верхних и нижних слоях атмосферы). Обычно для окончательного определения лучевой скорости усредняют результаты, полученные по нескольким спектральным линиям.

Влияние неаддитивных колебаний звезд на спектральные линии было рассмотрено Осаки [405] и Дзембовским [191]. См. также работы [59, 531, 532, 535, 537].

ГЛАВА 4

НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

В этой главе мы приведем в довольно общем виде некоторые из основных уравнений гидродинамики (с учетом переноса тепла), характеризующих поведение сплошной среды. Затем эти уравнения будут переписаны применительно к нескольким интересующим нас частным случаям. Мы также выведем «интегральную» теорему, относящуюся к системе в целом: теорему энергии.

Как правило, мы не будем приводить детальных выводов, поскольку их можно найти в учебниках гидродинамики и астрофизики. Если специально не оговорено, то всегда будет использоваться ряд физических упрощений. Наиболее важные из них таковы. Пространство считается евклидовым, т.е. плоским (см., например, [375]), и поэтому всегда можно ввести декартову ортогональную систему координат, охватывающую в пространстве любую область желаемого размера. Предполагается также, что масса сохраняется, т.е. что все материальные скорости малы по сравнению со скоростью света в вакууме. Наконец, считается справедливой ньютоновская теория тяготения (в противоположность общей теории относительности).

В качестве справочника по излагаемым здесь вопросам подходят любые хорошие учебники по гидродинамике и теоретической астрофизике. Автор считает особенно полезными статью Леду и Вальравена [345, §43 — 54] и книги Россанда [465], Ландау и Лифшица [323], Милна-Томсона [374] и Бэтчелора [42].

4.1. Представления Эйлера и Лагранжа

Рассмотрим газообразную или жидкую среду и будем считать ее непрерывной. Тем самым предполагается, что все элементы среды, с которыми мы имеем дело, пусть даже бесконечно малые в математическом смысле, достаточно велики, чтобы содержать большое число атомов или молекул. Поведение такой среды описывается двумя способами: в *представлении Эйлера* и в *представлении Лагранжа*.

В представлении Эйлера все физические характеристики среды, такие, как скорость \mathbf{v} , полное давление P , плотность ρ , температура T и т.д., рассматриваются как переменные поля, т.е. как функции положения \mathbf{r} и времени t . Величины \mathbf{r} и t считаются независимыми переменными. В заданной декартовой системе координат вектор \mathbf{r} может иметь, например, компоненты x, y, z (или, в более общем виде, x_1, x_2, x_3). Важно осознать, что эйлерова переменная положения \mathbf{r} характеризует не положение произвольного элемента среды, а положение точки наблюдения. Ясно, что эту переменную можно произвольным образом изменять независимо от времени t . (Некоторой аналогией может служить отверстие, просверленное в заборе для того, чтобы следить за находящейся по другую сторону «сплошной средой»; \mathbf{r} — это положение отверстия в заборе.) Следовательно, дифференцирование по времени эйлеровой переменной положения \mathbf{r} является, вообще говоря, бессмысленным, если не сделать некоторых оговорок или пояснений.

Однако часто бывает интересно проследить движение выделенного элемента жидкости и (или) наблюдать скорость изменения некоторого физического параметра, связанного с элементом, такого, как плотность. Производную по времени, характеризующую изменения, происходящие с выделенным элементом при его движении, иногда называют *субстанциональной* производной (или *материальной*, или *стоксовой*), и в настоящей книге она обычно будет обозначаться как d/dt (в литературе иногда используют обозначение D/Dt). Поскольку переменные \mathbf{r} и t формально считаются независимыми, при образовании субстанциональной производной от некоторой величины $f(\mathbf{r}, t)$ должно выполняться следующее операторное соотношение:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla, \quad (4.1)$$

где ∇ — обычный оператор градиента *, а скорость жидкости определяется формулой

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = d\mathbf{r}/dt = \dot{\mathbf{r}}. \quad (4.2)$$

Из самого понятия скорости ясно, что \mathbf{r} в последних равенствах в (4.2) — это уже не эйлерова, а лагранжева пространственная координата (см. следующий абзац), которая характеризует мгновенное положение рассматриваемого нами выделенного элемента.

* Можно показать, что нахождение градиента от некоторой величины эквивалентно нахождению *ковариантной производной* от этой величины; см., например, [362].

В представлении Лагранжа прослеживают движение заданного элемента жидкости, поэтому не всегда можно произвольно выбрать точку наблюдения. В этом представлении вектор \mathbf{r} характеризует положение некоторого выделенного элемента жидкости и, следовательно, больше не является независимой переменной. Напротив, величина \mathbf{r} — функция времени и (в трехмерном пространстве) трех характеризующих данный элемент параметров, скажем a_1, a_2, a_3 . Если a_1, a_2, a_3 — компоненты радиуса-вектора, скажем $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$, который совпадал с \mathbf{r} в момент, скажем $t = 0$, то $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{a}, t)$, где $\mathbf{r}(\mathbf{a}, 0) = \mathbf{a}$. В представлении Лагранжа жидкость рассматривается как совокупность большого числа отдельных материальных точек. Движения таких материальных точек не исследуются, и эта задача до некоторой степени сходна с задачей многих тел в классической механике. Однако в представлении Лагранжа величины a_i не обязательно должны быть пространственными координатами. При наличии одной степени свободы (одномерное пространство) величина a может быть некоторым физическим параметром элемента, например его температурой в некоторый заданный момент времени или, например, его массовой координатой при наличии сферической симметрии (см. ниже гл. 6, или любую книгу по внутреннему строению звезд, например [146, Ch. 1]).

Связь между представлениями Эйлера и Лагранжа дается соотношением (4.2). Если \mathbf{v} — известная функция \mathbf{r} и t , то (4.2) — это дифференциальное уравнение, которое можно решить, по крайней мере в принципе, относительно радиуса-вектора \mathbf{r} выделенного элемента жидкости, т.е. найти \mathbf{r} как функцию времени t , используя при этом величины a_i для идентификации рассматриваемого элемента $\mathbf{r} = \mathbf{r}(a_1, a_2, a_3, t)$. (Для наглядности можно представить себе, что в момент t сделан «моментальный снимок» жидкости. В общем случае в этот момент в каждой точке \mathbf{r} будет находиться некоторый элемент жидкости, и величина $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ дает мгновенную скорость этого элемента. Уравнение (4.2) применимо для каждого элемента жидкости в отдельности. Поэтому соотношение $\mathbf{r} = \mathbf{r}(a_1, a_2, a_3, t)$ описывает положение каждого элемента как функцию времени.)

Таким образом, в представлении Лагранжа величина \mathbf{r} оказывается зависимой переменной, а независимыми переменными являются a_i и t . Поэтому все физические величины следует рассматривать как функции от a_i и t . Субстанциональную производную в этом представлении можно записать просто как d/dt :

$$(d/dt)_{\text{Эйлера}} = (\partial/\partial t)_{\text{Лагранжа}}. \quad (4.3)$$

В общем случае в задачах с более чем одной степенью свободы (пространство более одного измерения) представление Эйлера более удобно, чем лагранжево. Однако в задачах с одной степенью свободы (например, при наличии сферической симметрии) представление Лагранжа обычно предпочтительнее. Основная причина заключается в том, что в представлении Лагранжа физическая интерпретация уравнений более понятна и более непосредственна, чем в представлении Эйлера. Кроме того, сами уравнения часто оказываются проще. Поэтому когда мы будем иметь дело с общими уравнениями и

теоремами в трехмерном пространстве, то будем обычно использовать представление Эйлера, а при рассмотрении одномерных задач — представление Лагранжа.

4.2. Уравнения сохранения массы импульса и энергии

4.2а. СОХРАНЕНИЕ МАССЫ

Мы рассмотрим здесь уравнения, выражающие сохранение массы, сначала в представлении Эйлера, а затем в представлении Лагранжа.

В представлении Эйлера принцип сохранения массы обычно формулируется как *уравнение неразрывности*:

$$\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (4.4)$$

где ρ — плотность*. Отметим, что величина $\rho \mathbf{v}$ — это плотность потока массы.

В уравнении (4.4) можно раскрыть скобки и использовать основное операторное соотношение (4.1). Тогда имеем альтернативную форму уравнения неразрывности

$$(1/\rho) d\rho/dt = -\nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (4.5)$$

Далее, можно ввести удельный объем $V = 1/\rho$ (объем единицы массы жидкости), и тогда уравнение (4.5) преобразуется к виду

$$(1/V) dV/dt = \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (4.6)$$

Данное уравнение показывает, что величина $\nabla \cdot \mathbf{v}$ — это просто скорость относительного увеличения объема фиксированной массы жидкости, когда эта масса движется.

Несжимаемая жидкость — это жидкость, плотность которой при движении не изменяется. Таким образом,

$$d\rho/dt = 0, \text{ откуда } \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (4.7)$$

Можно показать также (см., например, [374]), что принцип сохранения массы можно выразить в следующей форме:

$$d(\rho d\tau)/dt = d(dm)/dt = 0, \quad (4.8)$$

где $d\tau$ и dm — элемент объема и элемент массы соответственно. Следовательно, если масса сохраняется, то оператор d/dt , действующий на любой интеграл по объему, такой, как ниже в уравнении (4.9), может быть внесен под знак интеграла и применен к члену (или членам), умножаемому на величину $\rho d\tau$. Таким образом,

$$(d/dt) \int_{V(t)} (\rho A) d\tau = \int_V (dA/dt) \rho d\tau = \int_M (dA/dt) dm, \quad (4.9)$$

* Если не сохраняется масса, то это уравнение не выполняется. Однако если сохраняется число баронов (см., например, [573]), то уравнение все же справедливо при условии, что величина ρ формально означает концентрацию баронов.

где $dm = \rho d\tau$, объем $V(t)$ по определению всегда содержит фиксированное, хотя и произвольное количество жидкости, т.е. объем $V(t)$ изменяет в соответствии с движением свои размеры и форму. Величина A — это любая конкретная физическая величина, отнесенная к единице массы, она может быть скаляром, вектором или тензором. Величина M в последнем интеграле — полная масса, заключенная в объеме $V(t)$. В связи с принятым определением V уравнение (4.9) в некоторых задачах следует использовать с осторожностью, например в задачах аккреции вещества или потери массы звездами.

Чтобы сформулировать принцип сохранения массы в представленном Лагранжа, удобно рассмотреть выражение для лагранжевой пространственной координаты $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{a}, t)$ для каждого элемента массы как выражение, представляющее непрерывное преобразование переменных. Данное соотношение определяет положение частицы жидкости в момент t , причем в момент $t = 0$ положение этой частицы описывалось вектором \mathbf{a} . Если предположить, что оба вектора \mathbf{r} и \mathbf{a} можно разложить на компоненты в фиксированной декартовой системе координат, то мы получим следующую «интегральную» форму уравнения сохранения массы в лагранжевом представлении (см., например, [345, §44], где рассмотрен более общий случай криволинейных координат):

$$\rho(\mathbf{a}, t) J(\mathbf{r}[\mathbf{a}, t]) = \rho_0, \quad (4.10)$$

где ρ_0 — локальная плотность жидкости в момент $t = 0$, т.е. $\rho_0 = \rho(\mathbf{a}, 0)$. Величина J — это якобиан преобразования:

$$J(\mathbf{r}[\mathbf{a}, t]) = |\partial x_j / \partial a_k| \quad (j, k = 1, 2, 3). \quad (4.11)$$

Отметим, что J — функция от \mathbf{r} , а \mathbf{r} в свою очередь — функция от \mathbf{a} и t . Поэтому при движении частиц жидкости J непрерывно изменяется со временем, причем в момент $t = 0$ $J = 1$.

Если взять от обеих частей уравнения (4.10) субстанциональную производную по времени, то мы получим «дифференциальную» форму уравнения сохранения массы. Предполагая $J \neq 0$ (что должно выполняться в любом случае, чтобы компоненты a_i можно было выразить через x_i), получим в результате соотношение, представляющее величину $\dot{\rho}$ как функцию от \dot{J} , где точки над символами обозначают субстанциональные производные. Используя понятие скорости жидкости $\mathbf{v} = \partial \mathbf{r} / \partial t = \dot{\mathbf{r}}$ и само понятие определителя, легко показать, что

$$\dot{J} = J \sum_i \partial v_i / \partial x_i = J \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (4.12)$$

Учитывая этот результат в соотношении между $\dot{\rho}$ и \dot{J} , получаем

$$\dot{\rho} / \rho = -\nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (4.13)$$

что в точности совпадает с уравнением (4.5), записанным в представлении Эйлера. Хотя последний результат был получен в предположении, что векторы \mathbf{r} и \mathbf{a} разложены на компоненты в фиксированной декартовой системе координат, уравнение (4.13), очевидно, должно выполняться в любой системе координат.

4.26. СОХРАНЕНИЕ ИМПУЛЬСА

Принцип сохранения импульса — это, по существу, второй закон Ньютона в применении к сплошной среде. Уравнение сохранения импульса мы рассмотрим сначала в представлении Эйлера, а затем в представлении Лагранжа. Это уравнение иногда называют уравнением движения.

В представлении Эйлера уравнение имеет вид

$$\rho d\mathbf{v}/dt = -\nabla \cdot \mathbb{P} + \rho \mathbf{f}, \quad (4.14)$$

где \mathbf{v} — скорость жидкости (импульс на единицу массы), \mathbf{f} — суммарная объемная или внешняя сила на единицу массы, а \mathbb{P} — тензор напряжений, обычно принимаемый симметричным (чтобы сохранялся момент количества движения, см., например, [374]). (Мы используем здесь обозначения тензорной алгебры, см., например, [185; 387, §1.6; 444].)

При выводе уравнения (4.14) предполагается, что масса сохраняется. Уравнение движения можно записать и в виде, не требующем выполнения этого условия, а именно (см., например, [345, §49])

$$\partial(\rho \mathbf{v})/\partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + \mathbb{P}) = \rho \mathbf{f}. \quad (4.15)$$

Это — консервативная форма уравнения сохранения импульса. Величину в скобках во втором слагаемом в левой части иногда называют «плотностью потока импульса», поскольку при отсутствии объемных сил ($\mathbf{f} = 0$) скорость уменьшения импульса (пространственная плотность которого составляет $\rho \mathbf{v}$) в фиксированном объеме жидкости равна полному потоку импульса $[(\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + \mathbb{P}) \cdot \mathbf{n} dS]$ через поверхность S , ограничивающую заданный объем жидкости (\mathbf{n} — внешняя нормаль к поверхности S).

Если напряжения сводятся к чистому гидростатическому давлению, как это имеет место в большинстве интересующих нас приложений, то тензор напряжений имеет вид

$$\mathbb{P} = P \mathbb{I}, \quad (4.16)$$

где P — гидростатическое давление, а \mathbb{I} — единичный тензор. Тогда сила, обусловленная напряжениями и действующая на элемент площади dS с внешней нормалью \mathbf{n} , равна $-P \mathbf{n} dS$, т. е. равна силе, направленной вдоль внутренней нормали к dS , а значит, чистому давлению. В этом случае уравнения (4.14) и (4.15) принимают вид

$$\rho d\mathbf{v}/dt = -\nabla P + \rho \mathbf{f} \quad (4.17)$$

и

$$\partial(\rho \mathbf{v})/\partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + P \mathbb{I}) = \rho \mathbf{f}. \quad (4.18)$$

Если жидкость покоится ($\mathbf{v} = 0$) и находится в гидростатическом равновесии, то ускорение частиц отсутствует и (4.17) сводится к уравнению гидростатического равновесия

$$\nabla P = \rho \mathbf{f}. \quad (4.19)$$

Эффекты турбулентности, вязкости или, например, крупномасштабных магнитных полей можно обычно описать с помощью тензора напряжений (см., например, [146, 345]).

В представлении Лагранжа независимыми переменными являются параметры a_i и время t , а не \mathbf{r} и t . Поскольку $P = P(a_1, a_2, a_3, t)$, в декартовой системе координат мы должны записать

$$\nabla P = \sum_i \mathbf{e}_i \partial P / \partial x_i = \sum_j \mathbf{e}_j (\partial a_j / \partial x_i) \partial P / \partial a_j = \sum_j (\nabla a_j) \partial P / \partial a_j,$$

так что уравнение (4.17) примет вид

$$\ddot{\mathbf{r}} = -(1/\rho) \sum_j (\nabla a_j) \partial P / \partial a_j + \mathbf{f}, \quad (4.20)$$

где $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, а точка обозначает субстанциональную производную. Это и есть соответствующее уравнение движения в представлении Лагранжа, если напряжения сводятся к чистому давлению. Отметим, что данное уравнение, вообще говоря, довольно сложное.

Простой пример уравнения (4.20) для одной степени свободы (одномерный случай) будет рассмотрен в гл. 6.

4.2в. СОХРАНЕНИЕ ЭНЕРГИИ

Закон сохранения энергии, следуя [345, § 50—52], удобно рассмотреть в трех вариантах: для механической энергии; тепловой и механической энергии вместе и только тепловой энергии.

Уравнение, описывающее сохранение механической энергии, можно получить из уравнения импульса (4.14) в представлении Эйлера, разделив все члены на ρ и умножив обе части скалярно на \mathbf{v} :

$$d(v^2/2)dt = -(1/\rho) \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{P}) + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \quad (4.21)$$

где $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$. Уравнение (4.21) просто устанавливает, что скорость изменения со временем кинетической энергии на единицу массы $v^2/2$ равна мощности объемных сил и сил, обусловленных наличием градиента давления (или дивергенции тензора напряжений), приходящейся на единицу массы.

Уравнение (4.21) можно записать и в другой форме, если использовать в правой его части следующее тождество:

$$\nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{P}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{P}) + \mathbf{P} : (\nabla \mathbf{v}), \quad (4.22)$$

где двоеточие в последнем члене означает операцию двойного скалярного произведения, т.е. свертки двух тензоров (см., например, [309, 444]). Умножив преобразованное таким образом уравнение (4.21) на $\rho d\tau = dm$, интегрируя по всему объему V жидкости массой M , применяя к первому интегралу в правой части теорему Гаусса — Остроградского (см., например, [444]), предполагая, что при этом сохраняется масса, и пренебрегая результирующим по-

верхностным интегралом, получим теорему сохранения механической энергии в интегральной форме:

$$d/dt \int_M \frac{1}{2} v^2 dm = \int_V P : (\nabla \mathbf{v}) d\tau + \int_M \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dm. \quad (4.23)$$

Ниже в разд. 4.6 будет приведена другая формулировка этой теоремы для случая, когда единственной действующей силой \mathbf{f} является сила гравитации.

Пренебрежение поверхностным интегралом оправдано тогда, когда $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S}$ равно нулю или достаточно мало. Это условие выполняется, если \mathbf{P} на поверхности достаточно мало (что обычно имеет место) или если вектор $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{P})$ приблизительно перпендикулярен $d\mathbf{S}$ (как, например, в равномерно вращающейся звезде).

Смысл уравнения (4.23) можно пояснить, рассматривая наиболее интересный случай, когда напряжения сводятся к чистому давлению. Тогда первый интеграл в правой части можно преобразовать, исходя из принципа сохранения массы. В результате получим

$$(d/dt) \int_M \frac{1}{2} v^2 dm = \int_M [Pd(1/\rho)/dt] dm + \int_M \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dm, \quad (4.24)$$

где первый интеграл в правой части — это просуммированная по всем элементам системы работа PdV/dt ($V = 1/\rho$), совершаемая каждым таким элементом над окружающей его средой в единицу времени.

Вторая форма уравнения энергии, выражающая сохранение тепловой и механической энергии, дает скорость изменения суммы кинетической и внутренней (тепловой) энергий элемента жидкости единичной массы, когда этот элемент движется. При этом следует помнить, что часть работы, совершаемой силами, действующими на каждый элемент вещества, будет превращаться в кинетическую энергию направленного движения, а не во внутреннюю энергию. (Простая аналогия: если зачерпнуть ведро воды и побежать с ним, то ясно, что этот процесс будет сообщать ведру и его содержимому кинетическую энергию, но не обязательно будет приводить к нагреву воды.) Кроме того, необходимо учитывать поверхностные силы, обусловленные напряжениями, действующими на поверхность системы. Пусть E — внутренняя энергия, \mathbf{f} — сумма всех объемных сил, а dq/dt — полная скорость приращения тепла при движении, причем все величины отнесены к единице массы. Тогда, используя уравнение неразрывности, можно показать, что искомое выражение будет иметь вид (см., например, [345])

$$d(\frac{1}{2} v^2 + E)/dt = -(1/\rho) \nabla \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + dq/dt. \quad (4.25)$$

Частным случаем этого уравнения является теорема Бернулли (см. [42, p. 156]).

Если бы мы не воспользовались уравнением неразрывности, то результат был бы таким:

$$d(\rho E + \rho v^2/2)/dt + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{v} + \rho v^2 \mathbf{v}/2 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}) = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \rho dq/dt. \quad (4.26)$$

Это выражение представляет собой консервативную форму уравнения энергии. Величину в скобках во втором слагаемом в левой части иногда называют «вектором потока энергии» (обозначим его через J_E), поскольку при отсутствии объемных сил ($f = 0$) и приращения или потерь тепла ($dq/dt = 0$) скорость уменьшения суммы внутренней и кинетической энергий (плотность которых составляет $\rho E + \rho v^2/2$) в фиксированном объеме равна потоку энергии через ограничивающую поверхность S

$$\oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{J}_E.$$

Отметим, что в случае $P = P_I$ имеем

$$J_E = \rho v(v^2/2 + E + P/\rho), \quad (4.27)$$

где $E + P/\rho$ — энтальпия на единицу массы.

Закон сохранения внутренней энергии — это первое начало термодинамики, представленное в несколько более общей форме, чем обычно. Соответствующее уравнение легко получить, комбинируя уравнения (4.21) и (4.25), выражающие условия сохранения механической энергии и суммы тепловой и механической энергий, а также используя тождество (4.22). В результате имеем

$$dE/dt = -(1/\rho)P : (\nabla \mathbf{v}) + dq/dt. \quad (4.28)$$

(Эта обобщенная форма первого начала термодинамики была получена также в [146, §9.7].)

Если напряжения сводятся к чистому давлению, т.е. если $P = P_I$, то уравнение (4.28) принимает вид

$$dq/dt = dE/dt + Pd(1/\rho)/dt = dE/dt + PdV/dt, \quad (4.29)$$

где $V = 1/\rho$. Это уравнение — обычная форма первого начала термодинамики.

Однако для астрофизических целей часто используют три другие формы уравнения (4.29) (все они эквивалентны между собой). Эти формы справедливы, в частности, при следующих предположениях:

а. Не происходит изменений химического состава, обусловленных неравновесными термоядерными реакциями (это ограничение можно снять, вводя в уравнения соответствующие дополнительные члены).

б. Давление P представляет собой термодинамическое давление, которое можно вычислить из уравнения состояния как функцию от какой-либо пары термодинамических переменных, скажем плотности ρ и температуры T : $P = P(\rho, T)$.

в. Аналогично внутренней энергии E на единицу массы можно также вычислить из соответствующего уравнения состояния как функцию от какой-либо пары термодинамических переменных, например $E = E(\rho, T)$.

Три формы уравнения (4.29) таковы (подробный вывод см. в [146, Ch. 9 и § 17.6]):

$$d \ln P/dt = \begin{cases} \Gamma_1 d \ln \rho/dt + [\rho(\Gamma_3 - 1)/P] dq/dt, & (4.30a) \\ \Gamma_1(d \ln \rho/dt) + (\chi_T/c_V T) dq/dt; & (4.30b) \end{cases}$$

$$d \ln T/dt = (\Gamma_3 - 1)d \ln \rho/dt + (1/c_V T) dq/dt, \quad (4.31)$$

$$d \ln T/dt = [(\Gamma_2 - 1)/\Gamma_2] d \ln P/dt + (1/c_P T) dq/dt. \quad (4.32)$$

В этих уравнениях c_V и c_P — удельные теплоемкости при постоянном объеме и при постоянном давлении соответственно, а χ_T определяется как

$$\chi_T = (\partial \ln P / \partial \ln T)_{\rho}. \quad (4.33)$$

Величины Γ_i — это обычные показатели адиабаты:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= (d \ln P / d \ln \rho)_{ad}, & \Gamma_3 - 1 &= (d \ln T / d \ln \rho)_{ad}, \\ (\Gamma_2 - 1)/\Gamma_2 &= (d \ln T / d \ln P)_{ad} = (\Gamma_3 - 1)/\Gamma_1. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Приведем следующие полезные тождества (их подробный вывод см. в [146]):

$$\Gamma_1 = \chi_{\rho} + \chi_T(\Gamma_3 - 1), \quad (4.35)$$

где

$$\chi_{\rho} = (\partial \ln P / \partial \ln \rho)_T; \quad (4.36)$$

$$\gamma = c_P/c_V = \Gamma_1/\chi_{\rho}; \quad (4.37)$$

а также тождество, выражающее полноту дифференциала энтропии (соотношение взаимности):

$$(\partial \ln E / \partial \ln \rho)_T = (P/\rho E)(1 - \chi_T), \quad (4.38)$$

которое можно записать также в виде

$$\Gamma_3 - 1 = P\chi_T/(\rho c_V T). \quad (4.39)$$

Предположение о том, что $P = P||$, где P — термодинамическое давление, эквивалентно предположению об отсутствии молекулярной и лучистой вязкости, крупномасштабных магнитных полей и турбулентности. Поэтому при наличии этих дополнительных физических факторов соответствующие уравнения следует использовать с осторожностью.

4.3. Приращение и потери тепла

Итак, мы рассмотрели три из четырех основных дифференциальных уравнений гидродинамики с учетом переноса тепла. Теперь нам нужно получить четвертое основное уравнение, поскольку, прежде чем проводить вычисления с использованием уравнения энергии, мы должны уметь определять величину dq/dt — скорость выделения тепла на единицу массы. В общем случае количество тепла, приобретенное элементом вещества, равно разности между выделением тепла и теплоотводом. Пусть ε — полная скорость выделения теп-

ла на единицу массы от всех источников (в астрофизике это обычно термоядерные источники). Кроме того, пусть \mathbf{F} — вектор потока тепла (F — количество тепла, протекающее в единицу времени через единичную площадку, ориентированную перпендикулярно направлению потока тепла), обусловленный всеми возможными механизмами переноса (излучение, теплопроводность, конвекция, нейтринные потери, потеря массы и т.п.). Тогда можно записать

$$dq/dt = \epsilon - (1/\rho) \nabla \cdot \mathbf{F}. \quad (4.40)$$

Методы расчета ϵ , если это скорость генерации термоядерной энергии на единицу массы, подробно описаны в книгах по внутреннему строению звезд (например, [83, 99, 146]). Поскольку в настоящей книге источники термоядерной энергии обычно не будут интересовать нас непосредственно, мы только отметим, что выражение $\epsilon = \epsilon(\rho, T, \text{химический состав})$ часто можно представить с достаточной для сравнительно небольшого диапазона ρ и T точностью в виде простой степенной зависимости (см. [83, 99, 146]).

В астрофизических условиях наиболее важный вклад в полный поток тепла \mathbf{F} вносят лучистый и конвективный потоки. Поток вследствие теплопроводности, если она существенна, можно рассмотреть формально по аналогии с лучистым потоком (см., например, [146]). Обычно лучистый поток не вызывает никаких серьезных проблем, за исключением, возможно, случаев чрезвычайно быстрых колебаний блеска (с частотами порядка или даже больше обратной величины от времени прохождения светом поперечника системы), а также за исключением самых внешних оптически тонких слоев очень протяженных звездных атмосфер. Оба эти эффекта тщательно и всесторонне рассмотрены Кастором [69]; сейчас продолжают исследования в данном направлении.

Вклад конвективного переноса в поток \mathbf{F} создает серьезные теоретические трудности, которые значительно возрастают в случае приложения теории конвекции к пульсирующим звездам. В этих приложениях необходимо использовать теорию неустойчившейся конвекции, поскольку в некоторых областях пульсирующей звезды характерные времена конвективных движений, по-видимому, того же порядка величины, что и период пульсаций. Подходящей теории неустойчившейся конвекции пока не существует, хотя уже был сделан ряд попыток — от относительно простых до чрезвычайно сложных — по разработке рекомендаций (если не самой теории) для рассмотрения такой неустойчившейся конвекции (обсуждение некоторых из этих попыток и соответствующие ссылки можно найти, например, в [133, §9.8.1]; более поздние исследования упоминаются в гл. 19).

Интегральный лучистый поток в звездных недрах обычно можно вычислить по формуле, основанной на приближении лучистой теплопроводности:

$$\mathbf{F} \approx -\frac{1}{2}(\pi/\chi\rho)\nabla B(T) = -\frac{1}{2}(\pi/\chi\rho)[dB(T)/dT]\nabla T, \quad (4.41)$$

где $B(T)$ — проинтегрированная по частотам функция Планка, а χ — непрозрачность (росселандово среднее). Детальное рассмотрение условий, при которых справедливо это приближение, представлено, например, в [146]; см.

также [69]. Усовершенствованный подход описан, например, в [588, App. A].

К настоящему времени составлены подробные таблицы непрозрачности (например, [126, 127]). Однако для сравнительно небольших интервалов изменений плотности ρ и температуры T часто достаточно хороши простые формулы со степенной зависимостью κ от ρ , T и химического состава.

4.4. Общее обсуждение уравнений

В этом разделе мы покажем, что рассмотренных основных уравнений: неразрывности, импульса, энергии, приращения и потерь тепла — вместе с соответствующими уравнениями состояния оказывается в принципе достаточно для полного описания поведения интересующей нас жидкости со временем при условии, что имеется еще некоторая дополнительная информация. Под уравнениями состояния мы понимаем, в частности, уравнения для расчета таких величин, как давление, внутренняя энергия, непрозрачность и скорость генерации термоядерной энергии, в зависимости от химического состава, плотности и температуры. Дополнительная информация включает в себя подходящие начальные и граничные условия (см. ниже), а также знание всех объемных сил, действующих на систему. Для простоты будем предполагать, что турбулентность в жидкости отсутствует, все напряжения сводятся к чистому термодинамическому давлению и всюду средняя длина свободного пробега фотона мала по сравнению с рассматриваемыми характерными размерами. Более общий подход не меняет существа задачи и лишь усложняет ее.

Прямое для определенности, что все интересующие нас характерные времена малы по сравнению с временем, необходимым для заметного изменения химического состава в результате термоядерных реакций. Поэтому химический состав среды можно считать постоянным. Кроме того, предположим, что единственной объемной силой является гравитация, а значит, ее можно вычислить в любой момент времени, исходя из мгновенного распределения вещества (см. разд. 4.5).

В качестве начальных условий выберем температуру T , плотность ρ и скорость жидкости \mathbf{v} как известные функции вектора \mathbf{r} , определяющего точку наблюдения, и начального момента времени t . На основе этих данных можно вычислить градиент температуры ∇T и градиент скорости $\nabla \mathbf{v}$. Кроме того, можно вычислить давление P (из уравнения состояния) и градиент давления ∇P , дивергенцию теплового потока $\nabla \cdot \mathbf{F}$ и скорость генерации термоядерной энергии ϵ , а значит и результирующую скорость приращения тепла на единицу массы, $dq/dt = \epsilon - \rho^{-1} \nabla \cdot \mathbf{F}$, объемную силу на единицу массы \mathbf{f} и все другие необходимые величины. Все приведенные величины являются функциями от \mathbf{r} и начального момента времени t .

В таком случае ясно, что вычисления на основе уравнений неразрывности, импульса и энергии дадут значения ρ , \mathbf{v} и T во всех точках \mathbf{r} и для несколько более позднего момента $t + dt$. Но это и есть та самая информация, которую мы приняли в качестве начальных условий в начальный момент времени t .

Понятно поэтому, что, продолжая вычисления шаг за шагом во времени, мы можем проследить в принципе всю дальнейшую эволюцию системы.

Обратите внимание, что это возможно только при одновременном использовании всех основных уравнений. Следовательно, имеется как раз столько уравнений, сколько необходимо для решения поставленной задачи.

4.5. Гравитационное поле

В большей части книги мы будем предполагать, что единственной объемной силой в звезде является ее собственное тяготение, которое и обеспечивает силу \mathbf{f} , действующую на единицу массы жидкости. В соответствии с этим силу \mathbf{f} необходимо вычислять исходя из гравитационного потенциала, который в свою очередь определяется из решения уравнения Пуассона

$$\nabla^2 \psi = 4\pi G \rho, \quad (4.42)$$

где G — гравитационная постоянная. Как хорошо известно (см. любой учебник теоретической физики или теории потенциала, например [289]), решение уравнения (4.42), представляющее физический интерес, имеет вид

$$\psi(\mathbf{r}, t) = -G \int_V \rho(\mathbf{x}, t) |\mathbf{x} - \mathbf{r}|^{-1} d\tau', \quad (4.43)$$

где интегрирование проводится по всему объему системы (т.е. по всем областям, где $\rho \neq 0$) (рис. 4.1). Сила \mathbf{f} равна градиенту этого потенциала:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \psi(\mathbf{r}, t). \quad (4.44)$$

В астрофизике \mathbf{f} обычно обозначают через \mathbf{g} — ускорение силы тяжести.

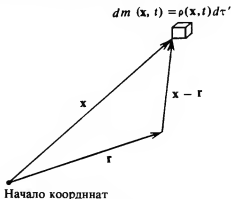


рис. 4.1. К выводу гравитационного потенциала.

Уравнение Пуассона иногда удобно записать в виде двух дифференциальных уравнений первого порядка вместо одного уравнения второго порядка. Эти два уравнения следующие:

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = -4\pi G \rho \quad (4.45)$$

и уравнение (4.44).

4.6. Теорема сохранения энергии для самогравитирующей системы

В этом разделе мы применим закон сохранения тепловой и механической энергии (разд. 4.2) к системе, в которой единственной объемной силой является собственная гравитация.

Сначала определим полную гравитационную потенциальную энергию системы посредством следующих соотношений:

$$\Phi = -\frac{1}{2}G \int_V \int_V \rho(\mathbf{x}, t) d\tau' \rho(\mathbf{r}, t) |\mathbf{x} - \mathbf{r}|^{-1} d\tau = \quad (4.46)$$

$$= \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) d\tau. \quad (4.47)$$

Множитель $\frac{1}{2}$ учитывает тот факт, что потенциальная энергия каждой пары элементов массы $\rho(\mathbf{x}, t) d\tau'$ и $\rho(\mathbf{r}, t) d\tau$ дважды подсчитывается в двойном интеграле (4.46). Оба этих интеграла следует брать по всему объему жидкости. Равенство (4.47) обусловлено тем, что один из интегралов в (4.46) совпадает с выражением (4.43) для $\psi(\mathbf{r}, t)$.

Определим также полную кинетическую и полную внутреннюю энергии системы соответственно:

$$\mathcal{T} = \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 d\tau, \quad (4.48)$$

$$U = \int_V \rho E d\tau. \quad (4.49)$$

Если теперь проинтегрировать уравнение (4.25) по всему объему системы и выполнить некоторые преобразования, то можно получить следующее уравнение:

$$d\Psi/dt = \int_V \rho(dq/dt) d\tau - \oint_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{P} + \rho\psi\mathbf{v}/2) \cdot d\mathbf{S}, \quad (4.50)$$

где

$$\Psi = \mathcal{T} + U + \Phi. \quad (4.51)$$

Во многих случаях поверхностный интеграл в (4.50) обращается в нуль. Например, на поверхности S могут обращаться в нуль величины P и ρ . Если этого не происходит и если $P = P\mathbf{l}$, то может обращаться в нуль нормальная составляющая скорости \mathbf{v} (как, например, в равномерно вращающейся звезде), и тогда $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0$. Тогда имеем

$$d\Psi/dt = \int_V \rho(dq/dt) d\tau, \quad (4.52)$$

откуда следует, что величина Ψ может изменяться только в результате накопления или потерь тепла системой. Поэтому величину Ψ можно рассматривать как полную энергию системы.

При наличии теплового равновесия в звезде величина dq/dt всюду мала [см. уравнение (4.40)]. У такой звезды изменение энергии Ψ со временем, согласно уравнению (4.52), происходит очень медленно. (Вследствие медленного изменения химического состава в ходе звездной эволюции величина Ψ не может быть строго постоянной: внутреннее строение звезды медленно меняется в ходе эволюции. Поэтому правая часть уравнения (4.52) никогда не равна в точности нулю, даже если звезда находится практически в тепловом равновесии.)

Если $\varepsilon = 0$, то из уравнения (4.52) следует, что потери энергии с поверхности сопровождаются соответствующим уменьшением полной энергии системы. Если в звезде нет никаких источников энергии, то уравнение (4.53) описывает процесс гравитационного (кельвиновского) сжатия (подробнее см. в книгах по внутреннему строению звезд).

Укажем частный случай уравнения (4.50). Используем первое начало термодинамики в форме (4.28) для исключения члена dq/dt . Когда напряжения сводятся к чистому давлению, имеем $\mathbb{P} : (\nabla \mathbf{v}) = Ppd(1/\rho)/dt$ (с учетом уравнения неразрывности) и, пренебрегая поверхностным интегралом, получаем

$$d(\mathcal{T} + \Phi)/dt = \int_M [Pd(1/\rho)/dt] dm, \quad (4.53)$$

где интегрирование проводится по полной массе системы. Этот результат — частный случай теоремы сохранения механической энергии, и он устанавливает, что скорость изменения суммы кинетической и гравитационной потенциальной энергии всей системы равна полной работе PdV/dt , совершаемой всеми элементами массы над окружающими их слоями вещества в единицу времени. Эквивалентная форма записи уравнения (4.53) такова:

$$(d\Psi/dt)_{ad} = 0, \quad (4.54)$$

где

$$(d\Psi/dt)_{ad} = d(\mathcal{T} + \Phi)/dt - \int_M [Pd(1/\rho)/dt] dm, \quad (4.55)$$

причем $(d\Psi/dt)_{ad} = (d\Psi/dt)$ для случая адиабатического движения, т.е. при $dq/dt = 0$.

Возможно дальнейшее обобщение теоремы энергии (4.50) для учета эффектов магнитных полей и крупномасштабных электрических токов, но здесь мы на этом останавливаться не будем (см., например, [15, 79, 111]).

ГЛАВА 5 ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ

В этой главе мы будем иметь дело в основном с так называемыми линеаризованными уравнениями гидродинамики с учетом переноса тепла. Общий смысл этого термина будет разъяснен в разд. 5.1 и там же будут указаны некоторые важные случаи использования этих уравнений. В разд. 5.2 проведено довольно подробное обсуждение того, что подразумевается под состояниями

равновесия в звездах, и будут рассмотрены различные виды равновесия, изучаемые в астрофизике. В разд. 5.3 дано определение двух главных типов вариаций, используемых в линейной теории, а в разд. 5.4 будут выведены и проанализированы некоторые из основных линеаризованных уравнений. Наконец, в качестве простого примера использования этих уравнений в разд. 5.5 будут кратко рассмотрены адиабатические звуковые волны.

5.1. Введение

Общие уравнения, рассмотренные в гл. 4, образуют систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, аналитические решения которой существуют, вообще говоря, только для определенных случаев (как правило, неинтересных и весьма нереалистичных). Однако если известно частное решение, которое мы будем называть «невозмущенным», то часто представляет интерес найти другое решение (или, возможно, другие решения), которое мы будем называть «возмущенным» и которое в некотором смысле лишь немного отличается от невозмущенного решения. (Можно рассматривать оба эти решения как два возможных пути эволюции системы, отличающиеся друг от друга из-за различия начальных условий, причем основные уравнения допускают существование обоих путей.)

Если два решения лишь немного различаются между собой, то каждую зависимую переменную для возмущенного решения можно представить как сумму соответствующей зависимой переменной для невозмущенного решения и малой поправки, т.е. малой вариации, или возмущения. Подставляя выраженные таким образом зависимые переменные в уравнения, замечая при этом, что невозмущенное решение также является решением уравнений, и пренебрегая степенями вариаций выше первой, а также произведениями вариаций, мы получим систему дифференциальных уравнений в частных производных, решение которой дает поведение вариаций зависимых переменных в пространстве и во времени, при условии, что определены соответствующие начальные и граничные условия. Огромное преимущество полученной системы уравнений заключается в том, что эти уравнения линейные и чтобы решить их относительно вариаций, можно использовать хорошо известные математические методы.

Примером могут служить малые колебания системы относительно некоторого равновесного состояния (см. ниже разд. 5.2).

Вопрос о существовании таких колебаний в природе приводит к более глубокому рассмотрению линеаризованных уравнений, а именно к так называемой *линейной теории устойчивости* (хорошее изложение этой теории см., например, в книге Чандрасекара [72, Ch. 1]). Эта теория исследует вопрос о том, будет ли некоторое заданное решение (невозмущенное решение) *устойчивым* или *неустойчивым* относительно малых возмущений. По-видимому, явление, описываемое этим решением, могло бы длительное время существовать в природе только в том случае, если бы оно было устойчивым относительно всех видов возмущений, которым может быть физически подвержена система.

Если рассматриваемая система — звезда, совершающая малые колебания относительно равновесного состояния, то, вероятно, она когда-то стала неустойчивой относительно таких колебаний. При наличии подобной неустойчивости колебания возникают самопроизвольно, поскольку в природе всегда существует множество малых случайных флуктуаций физических условий. Затем амплитуда нарастающих колебаний, вероятно, достигла наблюдаемой величины (в общем случае колебания могут быть уже нелинейными).

Такие самовозбуждаемые колебания, которые могут быть результатом неустойчивости относительно бесконечных малых возмущений, часто называют колебаниями с «мягким» самовозбуждением (см. [345, p. 550]). Если колебания представляют собой пульсации, то говорят, что система *пульсационно неустойчива* (или «сверхустойчива», по терминологии Эддингтона [197, §135]*). Обоснованием терминологии Эддингтона служит, по-видимому, то, что в подобной системе возвращающие силы, сопровождающие отклонение из состояния равновесия, настолько велики, что вызываемое ими отклонение в «противоположную сторону» от равновесия больше первоначального отклонения.

Колебания, которые могут нарастать только после того, как на систему наложено конечное возмущение, часто называют колебаниями с «жестким» возбуждением. Некоторой аналогией служит теплота химической реакции: многие химические процессы начинаются только после достижения определенной температуры. Ко времени написания настоящей книги (1978) в астрофизической литературе, насколько нам известно, не было описано ни одного случая жесткого возбуждения звездных колебаний. Если такие колебания действительно почти не встречаются в природе, то линейная теория, очевидно, имеет исключительное значение для объяснения реально пульсирующих звезд, что, впрочем, обычно подразумевается без какой-либо аргументации. (Однако, как было отмечено Кристи [93], Стеллингверфом [546] и другими, детальное поведение реальной пульсирующей звезды вовсе не должно в точности соответствовать предсказаниям линейной теории; см., например, [133].)

Конечно, неустойчивость не обязательно должна иметь осциллирующий характер. Например, она может быть аперiodической. Примеры неустойчивости такого рода — *динамическая* и *вековая неустойчивость* в звездах. Оба эти вида неустойчивости представляют соответственно нарастающие отклонения от гидростатического и теплового равновесия. (Однако вековые не-

* Неудачный русский термин «сверхустойчивый» как эквивалент английского «overstable» сохранен здесь лишь в связи с последующим разъяснением терминологии Эддингтона. В дальнейшем термины «overstable» и «overstability» переводятся соответственно как «колебательно неустойчивый» и «колебательная неустойчивость». Понятия колебательной, пульсационной и вибрационной неустойчивости в данной книге эквивалентны — все они соответствуют неустойчивости, приводящей к возникновению колебаний в гидродинамической шкале времени. Исключение представляет разд. 19.6, где термин «пульсационная неустойчивость» охватывает и вековую неустойчивость. — *Прим. перев.*

стойчивости иногда могут иметь осциллирующий характер, см., например, [10, 11, 163, 252, 256, 260, 411].) Характерное время развития динамической неустойчивости обычно порядка времени свободного падения t_{ff} , а вековой неустойчивости порядка кельвиновского времени t_K (гл. 2).

5.2. Обсуждение равновесных состояний

Будем предполагать, что звездное вещество ведет себя как сплошная среда. Кроме того, примем для простоты, что все напряжения сводятся к термодинамическому давлению (разд. 4.2), все объемные силы обусловлены собственной гравитацией и основной источник энергии связан с ядерными превращениями, т.е. с ядерными реакциями. Будет ли состояние полного равновесия, характеризуемое отсутствием движений жидкости во всех точках системы в любой момент времени, т.е.

$$v(r, t) = 0, \quad (5.1)$$

решением уравнений гидродинамики с учетом переноса тепла? (Если специально не оговорено, то мы всегда будем предполагать, что все скорости измеряются относительно центра масс системы.)

Если химический состав среды меняется вследствие ядерных превращений, то уравнения энергии, представленные в п. 4.2в, должны быть соответствующим образом обобщены. Это обобщение легко осуществить, рассматривая термодинамические величины как функции не только двух термодинамических переменных, но еще и химического состава системы. Зададим химический состав с помощью относительных содержаний (по массе) x_i различных элементов. Легко показать, что в уравнение, вытекающее из первого начала термодинамики и записанное в одной из возможных форм [например (4.30а)], следует ввести дополнительный член. Этот член включает в себя величины \dot{x}_i , где точка означает субстанциональную производную.

Ясно, что скорость генерации энергии в ядерных реакциях на единицу массы ϵ зависит от \dot{x}_i . А сами величины \dot{x}_i определяются в общем случае системой из n уравнений ядерной кинетики:

$$\dot{x}_i = \dot{x}_i(x_1, \dots, x_n, \rho, T) \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.2)$$

где n — полное число различных атомных ядер в системе. Конкретный вид этих уравнений не существен для настоящего рассмотрения (см., например, [99, Ch. 7; 465]).

На вопрос, поставленный выше, мы попытаемся ответить, предположив, что состояние $v(r, t) = 0$ является решением уравнений, и затем тщательно рассмотрим вытекающие отсюда следствия. Исходя из основных уравнений, приведенных в гл. 4, легко показать, что если не приписывать физической системе очень экзотических (и, вероятно, неестественных) свойств, то все про-

изводные физических переменных по времени должны обращаться в нуль. А тогда

$$\varepsilon - (1/\rho)\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \quad (5.3)$$

и, кроме того,

$$\varepsilon = 0, \quad (5.4)$$

откуда следует, что

$$L = 0. \quad (5.5)$$

Таким образом, не будет никаких потерь энергии из системы. Если такой физической системой является звезда, то она должна иметь температуру межзвездного пространства, т.е. около 3 — 4 К!

Мы приходим к выводу, что состояние $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = 0$ является решением уравнений только в таких не представляющих интереса случаях, как, скажем, черный карлик, черная нейтронная звезда или облако покоящегося межзвездного газа при температуре межзвездного пространства *. Кроме того, отсюда же следует, что ни одна подобная звездная система, которая теряет энергию в окружающее пространство (т.е. имеет $L > 0$), не может находиться в идеальном статическом состоянии с $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = 0$. Следовательно, такие системы должны с течением времени эволюционировать. К такому выводу можно было бы прийти и из простых соображений, основанных на обычной термодинамической необратимости суммарных потерь тепла из системы и, как следствие, на приближении системы к состоянию термодинамического равновесия. Следует с удовлетворением отметить, что наши уравнения также приводят к указанному выводу.

Если ограничиться рассмотрением интервалов времени, достаточно коротких, чтобы можно было пренебречь $\dot{\chi}_i$ (во всех выражениях, за исключением ε), т.е. рассматривать интервалы много короче ядерного времени (гл. 2), то $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = 0$ может служить приближенным решением уравнений. Тогда все еще выполняется соотношение (5.3), которое является условием *теплового равновесия* (энергетического баланса во всей системе) (см., например, [146, Ch. 5]). Уравнения, описывающие данное состояние, — это обычные уравнения внутреннего строения стационарных звезд, дополненные соответствующими уравнениями состояния (разд. 4.4). Отметим, что уравнения внутреннего строения образуют систему обыкновенных, но нелинейных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим еще один интересный случай, когда система очень близка к состоянию гидростатического равновесия и когда $\varepsilon = 0$ (отсутствует ядерное энерговыделение), но $L > 0$. Примером является звезда на стадии гравитационного сжатия к главной последовательности. Легко показать, что в этом случае соотношение $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = 0$ не может быть решением уравнений, и поэто-

* Еще одна возможность, по крайней мере в принципе, — это черная дыра. Однако, поскольку наш анализ по определению нерелятивистский, такой объект не может существовать в рамках рассматриваемой теории.

му должны происходить макроскопические движения. Тем не менее такие движения могут оказаться настолько медленными, что производные от скорости \mathbf{v} по времени, т.е. ускорения элементов массы, будут пренебрежимо малы. По порядку величины эти скорости должны быть сравнимы с отношением радиуса звезды R к кельвинскому времени t_K (гл.2):

$$|\mathbf{v}| \sim R/t_K \sim 10^{-4} L R^2 / M^2 \text{ см/с}, \quad (5.6)$$

где L , R и M выражены в солнечных единицах. При $L = R = M = 1$ $|\mathbf{v}| \approx 30$ м/год. В таком случае имеем прежние уравнения внутреннего строения, только уравнение (5.3) следует заменить одной из форм уравнения энергии. Отметим, что, поскольку теперь все физические переменные зависят как от положения, так и от времени, эти уравнения образуют систему дифференциальных уравнений в частных производных. Состояния, описываемые этими уравнениями, иногда характеризуют как квазиравновесные, как состояния квазигидростатического равновесия или как состояния с нарушенным тепловым равновесием.

Чтобы изучать поведение систем в течение произвольно больших интервалов времени, достаточных для изменения химического состава в ядерных превращениях, при условиях, что система всегда очень близка к состоянию гидростатического равновесия, необходимо к системе уравнений, упомянутой в предпоследнем абзаце, добавить лишь уравнения кинетики (5.2) для x_i (при этом все уравнения должны рассматриваться как уравнения в частных производных). Именно такую систему уравнений и решают при современных расчетах звездной эволюции.

Если специально не оговорено, то под терминном «равновесие» мы всегда будем подразумевать состояние, описываемое уравнениями внутреннего строения стационарных звезд.

Наконец, необходимо отметить, что любое «равновесное» решение, характеризующее выполнение условия $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = 0$ в том или ином приближении, может существовать, но при этом может быть неустойчивым. Такая неустойчивость может быть пульсационной, динамической или вековой. Наличие неустойчивостей, если они существуют, часто выявляется посредством решения линеаризованных уравнений, к рассмотрению которых мы и переходим.

5.3. Эйлеровы и лагранжевы вариации

В линейной теории используют, как правило, два типа вариаций — эйлеровы и лагранжевы.

Рассмотрим некоторое частное «невозмущенное» решение уравнений гидродинамики с учетом переноса тепла. Будем обозначать это решение индексом 0. Следовательно, в этом решении положение в момент t некоторого выделенного элемента жидкости, характеризующего лагранжевыми независимыми переменными a_1 , a_2 и a_3 (в трехмерном пространстве), может быть представлено вектором

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(a_1, a_2, a_3, t) = \mathbf{r}_0(\mathbf{a}, t) \quad (5.7)$$

(рис. 5.1), где мы для краткости обозначили тройку чисел a_1, a_2, a_3 как вектор \mathbf{a} *. Невозмущенное решение часто описывает равновесную или квазиравновесную конфигурацию, в которой \mathbf{r}_0 , возможно, не зависит от t или медленно изменяется с t (однако в этом разделе совсем необязательно, чтобы невозмущенное решение представляло именно такую медленно изменяющуюся конфигурацию). В «возмущенном» решении для той же физической системы положение того же самого элемента жидкости в момент t записывается в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(a_1, a_2, a_3, t) = \mathbf{r}(\mathbf{a}, t). \quad (5.8)$$

Тогда *смещение* (или *лагранжево смещение*) элемента жидкости в момент t относительно его положения в невозмущенном решении определяется соотношением

$$\delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(a_1, a_2, a_3, t) - \mathbf{r}_0(a_1, a_2, a_3, t) = \delta \mathbf{r}(\mathbf{a}, t). \quad (5.9)$$

Ясно, что в представлении Лагранжа величина $\delta \mathbf{r}$ рассматривается как функция от \mathbf{a} и времени. Однако, поскольку для каждой пары \mathbf{a} и t (т.е. для каждого элемента жидкости) уравнения (5.7) определяют соответствующее положение элемента в невозмущенном течении, можно с таким же успехом считать $\delta \mathbf{r}$ функцией от \mathbf{r}_0 и t :

$$\delta \mathbf{r} = \delta \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t). \quad (5.10)$$

Наконец, если описывать лагранжевы смещения $\delta \mathbf{r}$ в представлении Эйлера, то их следует рассматривать как переменные поля, зависящие от (произвольной) точки наблюдения \mathbf{r} и от t :

$$\delta \mathbf{r} = \delta \mathbf{r}(\mathbf{r}, t). \quad (5.11)$$

Рассмотрим теперь произвольную физическую величину, которую обозна-

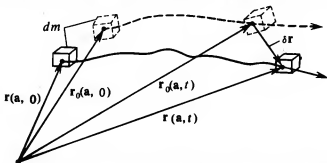


рис. 5.1. Иллюстрация к понятию лагранжева смещения $\delta \mathbf{r}$. Сплошная волнистая линия и соответствующие кубики показывают возмущенное движение элемента жидкости массой dm , а штриховые линии — невозмущенное движение этого же элемента.

* Конечно, не всякая тройка чисел может образовать вектор. Однако, поскольку символы a_1, a_2, a_3 часто обозначают компоненты радиус-вектора \mathbf{a} , эта запись не должна вызывать недоразумений.

чим через f в общем решении и через f_0 в невозмущенном решении. В представлении Эйлера, где f и f_0 считаются функциями точки наблюдения r и времени t , часто бывает удобно использовать эйлерову вариацию, которую мы здесь и всюду в этой книге будем обозначать штрихом. Таким образом эйлерова вариация физической величины f определяется как

$$f'(r, t) = f(r, t) - f_0(r, t), \quad (5.12)$$

т.е. эйлерова вариация f' — это разность между значениями f в возмущенном и невозмущенном решениях, вычисленная в данной точке наблюдения r в заданный момент времени t . Следовательно, образуя f' при заданных r и t , мы фактически сравниваем свойства, вообще говоря, двух различных элементов жидкости в двух указанных решениях.

Отметим, что операция нахождения эйлеровой вариации, очевидно, коммутативна с операциями вычисления градиента ∇ и производной $\partial/\partial t$.

Часто желательно сравнить для некоторого момента времени свойства заданного элемента жидкости в двух решениях. Этой цели служит *лагранжева вариация*, обозначаемая здесь и всюду в этой книге символом δ . Лагранжева вариация некоторой физической величины f определяется соотношением

$$\delta f = f(a, t) - f_0(a, t). \quad (5.13)$$

Иногда в литературе эйлерову вариацию величины f обозначают δf , а лагранжеву — Δf .

Есть еще один способ записи выражения (5.13). Величину f в правой части можно считать функцией точки наблюдения r и времени t . Элемент жидкости, находящийся в момент t в точке r , можно отождествить, решая уравнения (5.8) относительно a_i . Тогда положение r_0 этого же элемента жидкости в этот же момент t в невозмущенном решении можно определить, подставляя найденные значения a_i в уравнение (5.7). Тогда, рассматривая f_0 в правой части (5.13) как функцию от только что определенного r_0 и от t , мы можем быть уверены в том, что действительно сравниваем свойства одного и того же элемента жидкости в двух решениях. Таким образом, имеем

$$\delta f = f(r, t) - f_0(r_0, t), \quad (5.14)$$

где r и r_0 связаны между собой через (5.7) и (5.8), причем $r - r_0 = \delta r$.

Из уравнения (5.14) удобнее всего получить связь между эйлеровой f' и лагранжевой δf вариациями. Прибавляя и вычитая в правой части величину $f_0(r, t)$ и используя определение вариации f' (5.12), имеем

$$\delta f = f' + [f_0(r, t) - f_0(r_0, t)], \quad (5.15)$$

Хотя это соотношение является точным, более удобна и более распространенна его приближенная форма, которую получают, разлагая член в квадратных скобках в ряд Тейлора относительно точки r_0 и ограничиваясь членами первого порядка по δr :

$$\delta f = f' + (\delta r) \cdot \nabla f_0. \quad (5.16)$$

Конечно, с точностью до первого порядка по δr величину ∇f_0 можно при желании заменить на ∇f .

Величина δf коммутативна с субстанциональной производной d/dt :

$$d(\delta f)/dt = \delta(df/dt). \quad (5.17)$$

это соотношение является точным, что следует из определения лагранжевой вариации (5.13) и по самому смыслу субстанциональной производной как производной по времени для заданного элемента жидкости [при дифференцировании величин a_i в (5.13) считаются постоянными].

Однако соотношение (5.17) остается справедливым (но уже с точностью до первого порядка малости) и в том случае, если использовать представление Эйлера и если в соответствии с этим записать субстанциональную производную через локальную производную $\partial/\partial t$ и «конвективный» оператор $\mathbf{v} \cdot \nabla$ [см. соотношение (4.1)]. Доказательство проведено двумя способами в работе [356]. Справедливость этого соотношения (с точностью до первого порядка малости) можно показать и непосредственным вычислением, используя некоторые из рассмотренных выше понятий и соотношений.

На основе приведенных результатов можно отметить следующие общие правила (справедливые по крайней мере с точностью до первого порядка малости):

- 1) оператор $'$ не коммутативен с d/dt ;
- 2) оператор δ не коммутативен ни с $\partial/\partial t$, ни с ∇ .

С другой стороны,

- 3) оператор $'$ коммутативен с $\partial/\partial t$ и ∇ ;
- 4) оператор δ коммутативен с d/dt .

Рассмотрим теперь соотношение между скоростью жидкости \mathbf{v} и смещением $\delta \mathbf{r}$.

Снова рассмотрим два возможных течения жидкости: возмущенное и невозмущенное, которые являются решениями уравнений гидродинамики с учетом переноса тепла (рис. 5.1). Пусть \mathbf{r} и \mathbf{r}_0 характеризуют положение одного и того же элемента жидкости в момент t в этих двух течениях, причем \mathbf{r} и \mathbf{r}_0 связаны между собой уравнениями (5.7) и (5.8). Тогда скорость жидкости $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ в возмущенном течении определяется соотношением

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = d\mathbf{r}/dt. \quad (5.18)$$

Аналогично, скорость жидкости $\mathbf{v}_0(\mathbf{r}_0, t)$ в невозмущенном течении равна

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{r}_0, t) = d\mathbf{r}_0/dt. \quad (5.19)$$

Таким образом, \mathbf{v} и \mathbf{v}_0 описывают движения одного и того же элемента жидкости в двух течениях. В соответствии с этим имеем

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v}_0(\mathbf{r}_0, t) = d(\delta \mathbf{r})/dt = \delta \mathbf{v}, \quad (5.20)$$

где $\delta \mathbf{r}$ — лагранжево смещение и где во втором равенстве мы использовали коммутативность операторов δ и d/dt ; $\delta \mathbf{v}$ — лагранжева вариация скорости. Отметим, что второе равенство можно записать в виде

$$\delta \mathbf{v} = d(\delta \mathbf{r})/dt = \partial(\delta \mathbf{r})/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla(\delta \mathbf{r}). \quad (5.21)$$

Эйлерова вариация скорости \mathbf{v}' определяется как разность скоростей двух течений в одной и той же точке \mathbf{r} в момент t :

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t). \quad (5.22)$$

Используя соотношение (5.16) между обеими вариациями (справедливое с точностью до первого порядка), имеем

$$\delta \mathbf{v} = \mathbf{v}' + (\delta \mathbf{r}) \cdot \nabla \mathbf{v}, \quad (5.23)$$

$$\mathbf{v}' = \partial(\delta \mathbf{r}) / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla (\delta \mathbf{r}) - (\delta \mathbf{r}) \cdot \nabla \mathbf{v}. \quad (5.24)$$

Два первых члена в правой части (5.24) — это как раз $d(\delta \mathbf{r})/dt$.

В важном частном случае, когда невозмущенное решение соответствует равновесному состоянию с $\mathbf{v}_0 = 0$, мы с точностью до первого порядка малости имеем

$$\mathbf{v} = \delta \mathbf{v} = \mathbf{v}' = d(\delta \mathbf{r})/dt = \partial(\delta \mathbf{r})/\partial t. \quad (5.25)$$

Таким образом, в данном случае нет необходимости делать различие между двумя типами вариаций скорости или между двумя типами производных по времени, а сама скорость \mathbf{v} является величиной первого порядка малости.

5.4. Линеаризованные уравнения

В этом разделе мы получим некоторые линеаризованные уравнения гидродинамики с учетом переноса тепла.

5.4а. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ

Начнем с уравнения неразрывности (4.4), записывая

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0(\mathbf{r}, t) + \rho'(\mathbf{r}, t), \quad (5.26)$$

и т.д., где индексом 0 обозначены величины в невозмущенном течении, а штрихами — эйлеровы вариации. Подставляя (5.26) в (4.4), получим линеаризованное уравнение неразрывности:

$$\partial \rho' / \partial t + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}' + \rho' \mathbf{v}_0) = 0. \quad (5.27)$$

Отметим, что поскольку невозмущенное течение по предположению является решением уравнений, линеаризованные уравнения можно получить и более прямым способом, просто рассматривая штрих как обычный дифференциальный оператор, действующий на исходные нелинейные уравнения. Однако необходимо всегда учитывать четыре правила коммутативности, сформулированные в разд. 5.3.

В важном частном случае, когда $\mathbf{v}_0 = 0$ и соответственно $\partial \rho_0 / \partial t = 0$ и $\mathbf{v}' = \mathbf{v}$, уравнение (5.27) принимает вид

$$\partial \rho' / \partial t + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}) = 0. \quad (5.28)$$

Это более распространенная форма линеаризованного уравнения неразрывности. (Следует напомнить, что с точностью до первого порядка малости

безразлично, писать или опускать индекс 0 у невозмущенных величин, т.е. невозмущенные величины можно заменить на возмущенные.)

Иногда оказывается полезным и «интегральное» уравнение неразрывности. Его легче всего получить, если записать в (5.28) $\mathbf{v} = \partial(\delta\mathbf{r})/\partial t$ и учесть, что величина ρ_0 в этом уравнении не зависит от t . Интегрируя по времени и выбирая постоянную интегрирования так, чтобы $\rho' = 0$ при $\delta\mathbf{r} = 0$, получаем

$$\rho' + \nabla \cdot [\rho_0(\delta\mathbf{r})] = 0, \quad (5.29a)$$

или

$$\delta\rho + \rho_0 \nabla \cdot (\delta\mathbf{r}) = 0. \quad (5.29b)$$

Хотя уравнения (5.29) были получены в предположении $\mathbf{v}_0 = 0$, они справедливы и при $\mathbf{v}_0 \neq 0$. Этот результат, по-видимому, проще всего получить, взяв лагранжеву вариацию от обеих частей уравнения неразрывности в представлении Лагранжа [уравнение (4.10)] для случая, когда оба радиус-вектора \mathbf{r} и \mathbf{a} (характеризующие положение одного и того же элемента жидкости в произвольный момент времени t и в некоторый фиксированный предшествующий момент, например $t = 0$) записываются в проекциях на оси заданной декартовой системы координат, и выполнить затем небольшие преобразования. См. также [238, p. 357].

Еще одно доказательство справедливости уравнений (5.29) при $\mathbf{v}_0 \neq 0$ представил Айзман (1974, частное сообщение). Недостаток места не позволяет привести это доказательство полностью, но хотя бы краткий набросок его будет поучительным.

Айзман подставил выражение (5.24) в линеаризованное уравнение неразрывности (5.27). После некоторых преобразований с учетом нескольких векторных тождеств он привел это уравнение к виду $\partial A/\partial t + \nabla \cdot (A\mathbf{v}_0) = 0$, где $A = \rho' + \nabla \cdot [\rho_0(\delta\mathbf{r})]$. Единственным решением данного уравнения, имеющим физический смысл, является частное решение $A = \text{const}$ в пространстве и во времени. А тогда $A\nabla \cdot \mathbf{v}_0 = 0$, и поскольку величина \mathbf{v}_0 произвольная, то отсюда следует $A = 0$, что совпадает с уравнением (5.29a).

5.46. УРАВНЕНИЕ ИМПУЛЬСА

Уравнение импульса мы рассмотрим здесь только для случая, когда все напряжения сводятся к чистому давлению. Используя выражение (4.1) для субстанциональной производной и беря затем зйлерову вариацию от обеих частей общего нелинейного уравнения импульса (4.17), получаем

$$\partial \mathbf{v}'/\partial t + \mathbf{v}' \cdot \nabla \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{v}' = (\rho'/\rho_0^2) \nabla P_0 - (1/\rho_0) \nabla P' + \mathbf{f}'. \quad (5.30)$$

В частном случае, когда невозмущенное состояние является равновесным с $\mathbf{v}_0 = 0$, имеем $\mathbf{v}' = \mathbf{v}$ и, следовательно,

$$\partial \mathbf{v}/\partial t = (\rho'/\rho^2) \nabla P - (1/\rho) \nabla P' + \mathbf{f}', \quad (5.31)$$

где индекс 0 опущен. Это более распространенная форма линеаризованного уравнения импульса.

Иногда бывает полезно взять лагранжеску вариацию от обеих частей уравнения импульса. Учитывая, что

$$\delta(d\mathbf{v}/dt) = d(\delta\mathbf{v})/dt = d[\delta(d\mathbf{r}/dt)]/dt = d[d(\delta\mathbf{r})/dt]/dt = d^2(\delta\mathbf{r})/dt^2,$$

получаем

$$d^2\delta\mathbf{r}/dt^2 = -\delta(\rho^{-1}\nabla P) + \delta\mathbf{f}. \quad (5.32)$$

Это уравнение оказывается особенно полезным для сферически симметричных систем, и оно будет широко использоваться в части II.

Обе формы уравнения импульса (5.30) и (5.32) совершенно эквивалентны при условии, что используется соотношение (5.24) между \mathbf{v}' и $\delta\mathbf{r}$. Эту эквивалентность можно доказать, учитывая связь (4.1) между d/dt и $\partial/\partial t$ и замечая, что $d^2\delta\mathbf{r}/dt^2 = d\delta\mathbf{v}/dt$, а $d\mathbf{v}_0/dt = d^2\mathbf{r}_0/dt^2$; правая часть уравнения (5.32) равна

$$-(\rho^{-1}\nabla P)' + \mathbf{f}' + \delta\mathbf{r} \cdot \nabla(d\mathbf{v}_0/dt),$$

и, наконец,

$$\delta\mathbf{r} \cdot \nabla(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{v}_0) = (\delta\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{v}_0) \cdot (\nabla \mathbf{v}_0) + \delta\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)(\nabla \mathbf{v}_0).$$

См. также [581, App. V].

5.4.в. УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГИИ

Очень полезной формой нелинейного уравнения энергии является уравнение (4.30а). Отметим, однако, что оно не учитывает изменений химического состава в результате термоядерных реакций. Заменим dq/dt на $\epsilon - (\nabla \cdot \mathbf{F})/\rho$, где ϵ — скорость генерации термоядерной энергии на единицу массы, а \mathbf{F} — вектор теплового потока. Взяв лагранжеску вариацию от обеих частей этого уравнения, получим

$$d(\delta P/P_0)/dt = \Gamma_{1,0} d(\delta\rho/\rho_0)/dt + (\delta\Gamma_1) d\ln\rho_0/dt + [(\Gamma_3 - 1)_0 \rho_0/P_0] \delta(\epsilon - \rho^{-1} \nabla \cdot \mathbf{F}) + [\delta\Gamma_3/(\Gamma_3 - 1)_0 + \delta\rho/\rho_0 - \delta P/P_0][(\Gamma_3 - 1)_0 \rho_0/P_0](\epsilon - \rho^{-1} \nabla \cdot \mathbf{F})_0. \quad (5.33)$$

Если система в невозмущенном состоянии покоится и находится в тепловом равновесии, так что $d\rho_0/dt = 0$ и $[\epsilon - (\nabla \cdot \mathbf{F})/\rho]_0 = 0$, то имеем

$$d(\delta P/P_0)/dt = \Gamma_{1,0} d(\delta\rho/\rho_0)/dt + [(\Gamma_3 - 1)_0 \rho_0/P_0] \delta(\epsilon - \rho^{-1} \nabla \cdot \mathbf{F}). \quad (5.34a)$$

Соответствующее уравнение для вариации температуры имеет вид

$$d(\delta T/T_0)/dt = (\Gamma_3 - 1)_0 d(\delta\rho/\rho_0)/dt + (1/c_{V,0} T_0) \delta(\epsilon - \rho^{-1} \nabla \cdot \mathbf{F}), \quad (5.34b)$$

где $c_{V,0}$ — удельная теплоемкость при постоянном объеме.

Можно привести также общие термодинамические тождества

$$\delta P/P_0 = \Gamma_{1,0} \delta\rho/\rho_0 + [\rho_0(\Gamma_3 - 1)_0/P_0] T_0 \delta s, \quad (5.35a)$$

$$\delta T/T_0 = (\Gamma_3 - 1)_0 \delta\rho/\rho_0 + c_{V,0}^{-1} \delta s, \quad (5.35b)$$

где δs — лагранжеска вариация удельной энтропии s . Эти тождества применимы даже в том случае, когда невозмущенное состояние звезды не является состоянием полного равновесия; в частности, их использовал Демаре [164].

Если линейризованное уравнение энергии желательно записать через зйлеровы вариации, то поступают следующим образом. Во-первых, субстанциональные производные в уравнениях (4.30а) или (4.30б) заменяют с помощью (4.1) на частные производные (разумеется, операция не относится к dq/dt). А затем просто берут зйлерову вариацию от обеих частей уравнения, учитывая при этом правила коммутативности, суммированные в разд. 5.3, и в результате получают соответствующее линейризованное уравнение.

В линейной теории часто предполагается, что движения являются адиабатическими. Обычно это означает, что последние члены в уравнениях (5.34) равны нулю или пренебрежимо малы. (Для систем, в которых отсутствует тепловое равновесие, понятие адиабатичности должно быть определено более тщательно, см. разд. 19.4.) Тогда уравнения (5.34) тривиально интегрируются. Выбирая постоянную интегрирования так, чтобы $\delta P = 0$ при $\delta \rho = 0$, получаем

$$\delta P / P_0 = \Gamma_{1,0} \delta \rho / \rho_0. \quad (5.36a)$$

Соответствующее уравнение, связанное с вариациями температуры, будет иметь вид

$$\delta T / T_0 = (\Gamma_3 - 1)_0 \delta \rho / \rho_0. \quad (5.36b)$$

5.5. Приложение: адиабатические звуковые волны

В качестве простого примера использования линейризованных уравнений кратко рассмотрим адиабатические звуковые волны. Этим подчеркивается тот факт, что изучая звездные пульсации, мы часто имеем дело в некотором смысле с разновидностью звуковых волн. Предположим, что движение адиабатическое, т.е. $\delta[\epsilon - (\nabla \cdot \mathbf{F})/\rho] = 0$, и пренебрежем любыми изменениями химического состава. Примем также, что невозмущенное решение соответствует состоянию «равновесия», характеризуемому $\mathbf{v}_0 = 0$ и $[\epsilon - (\nabla \cdot \mathbf{F})/\rho]_0 = 0$; следовательно, $\mathbf{v}' = \mathbf{v}$. Кроме того, допустим, что характерная длина, связанная с пространственными изменениями P_0 и ρ_0 , велика по сравнению с другими характерными длинами задачи (приближение коротковолновой акустики), т.е. можно пренебречь величинами ∇P_0 и $\nabla \rho_0$. Наконец, предположим, что нет никаких объемных сил ($\mathbf{f} = 0$).

При всех этих упрощающих предположениях уравнения неразрывности, импульса и энергии легко объединить в одно волновое уравнение (см., например, [323]):

$$\partial^2 \rho' / \partial t^2 = -v_s^2 \nabla^2 \rho', \quad (5.37)$$

где v_s — адиабатическая (или лапласова) скорость звука:

$$v_s = (\Gamma_{1,0} P_0 / \rho_0)^{1/2}. \quad (5.38)$$

Как показали Ландау и Лифшиц [323], линейризованное уравнение импульса требует, чтобы скорость \mathbf{v} была параллельна волновому вектору $\pm \mathbf{k}$. Следовательно, скорости частиц жидкости, связанные с адиабатическими звуко-

выми волнами, параллельны направлению распространения волн. Другими словами, такие звуковые волны являются продольными, или волнами сжатия, причем все возвращающие силы, действующие на частицы жидкости (которые связаны с некоторым возмущением плотности), обусловлены силами давления. В части III мы встретимся с гравитационными волнами, для которых возвращающей силой служит преимущественно сила тяготения, а не силы давления.

Ландау и Лифшиц [323] показали также, что уравнение неразрывности требует, чтобы выполнялось соотношение

$$\rho' / \rho_0 = v / v_s. \quad (5.39)$$

Данное уравнение показывает, что если $|v/v_s| \ll 1$, то и $|\rho'/\rho_0| \ll 1$. Этот результат означает, что в рассматриваемом приложении линейная теория справедлива до тех пор, пока флуктуации скорости, связанные со звуковыми волнами, остаются малыми по сравнению с самой скоростью звука.

Часть II

РАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЗВЕЗД

В данной части мы сосредоточим внимание на анализе чисто радиальных сферически симметричных колебаний звезд. К счастью, рассмотрение этого простого и наиболее глубоко изученного вида движения достаточно для теоретического исследования большинства известных типов пульсирующих звезд, наблюдаемых в природе (гл. 3). Нерадиальные же колебания звезд будут рассмотрены в третьей части.

В гл. 6 мы представим некоторые из общих векторных уравнений гл. 4, специально упростив их для принятого вида движений. Соответствующая форма некоторых линеаризованных уравнений гл. 5 будет дана в гл. 7. В гл. 8 будет проанализирован физически ограниченный, но очень важный случай линейных адиабатических радиальных колебаний. Более реалистичный, но и намного более сложный случай линейных неадиабатических колебаний мы обсудим в гл. 9. В гл. 10 будут представлены в основном с физической точки зрения некоторые механизмы возбуждения пульсаций, а сдвиг фаз между изменениями радиуса и светимости звезды будет рассмотрен в гл. 11. Гл. 12 посвящена очень сложной, но эффективной нелинейной теории и соответствующим вычислительным методам. Наконец, в гл. 13 мы опишем несколько простых моделей звездных пульсаций, которые были предложены для того, чтобы сделать более понятными некоторые запутанные детали в сложном явлении звездных пульсаций.

ГЛАВА 6

СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОЕ РАДИАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

В данной главе мы представим в сферических координатах некоторые необходимые уравнения сначала в общем виде, а затем специально для случая сферически симметричного радиального движения. Если не указано особо, то мы всегда будем пренебрегать турбулентностью и всеми видами вязкости. Мы используем также физические упрощения, суммированные в начале гл. 4. Кроме того, мы будем пренебрегать крупномасштабными магнитными полями и будем предполагать, что единственной объемной силой является собственное тяготение звезды.

6.1. Представление Эйлера

На рис. 6.1 изображена правая система сферических координат, которую мы будем использовать. Величины θ_r , θ_θ и θ_φ — безразмерные единичные ортогональные векторы, направленные вдоль ее осей. В указанной системе координат любой вектор, например скорость \mathbf{v} , разлагается на следующие компоненты:

$$\mathbf{v} = v_r \theta_r + v_\theta \theta_\theta + v_\varphi \theta_\varphi, \quad (6.1)$$

где величины v_r , v_θ , v_φ в общем случае зависят от r , θ и φ . Явный вид оператора градиента ∇ в этих координатах можно найти в любом справочнике по математике или теоретической физике (см., например, [309]).

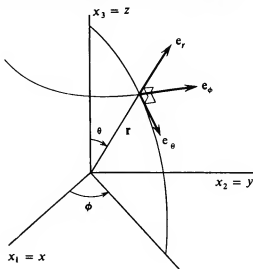


рис. 6.1. Сферические координаты.

Возможны различные виды производных вектора \mathbf{v} по пространственным координатам: $\nabla \mathbf{v}$, $\nabla \cdot \mathbf{v}$, $\nabla^2 \mathbf{v}$, ... Учитывая, что единичные векторы θ_r , θ_θ и θ_φ при дифференцировании по пространству в общем случае меняют свое направление, можно прямым дифференцированием записать в явном виде все девять компонентов тензора $\nabla \mathbf{v}$ (здесь мы их не приводим). Поскольку величина $\nabla \cdot \mathbf{v}$ представляет собой свертку этого тензора, имеем

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = (1/r^2) \partial(r^2 v_r) / \partial r + (1/r \sin \theta) \partial(v_\theta \sin \theta) / \partial \theta + (1/r \sin \theta) \partial v_\varphi / \partial \varphi. \quad (6.2)$$

Записывая $\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot (\nabla \Phi)$, где Φ — скаляр, получаем

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \partial \Phi / \partial r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \partial \Phi / \partial \theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}. \quad (6.3)$$

Для сферически симметричного радиального движения имеем $v_r = v = v(r)$ (функция только от r), $v_\theta = v_\varphi = 0$, и, следовательно, $\nabla \cdot \mathbf{v}$ определяется лишь первым слагаемым в правой части равенства (6.2). Кроме того, в случае сферической симметрии Φ также зависит только от r , и поэтому в правой части выражения (6.3) остается лишь первый член. Однако если \mathbf{v} представляет собой вектор с единственным (радиальным) компонентом $v(\mathbf{v} = v\mathbf{e}_r)$, то радиальный (и единственный) компонент вектора $\nabla^2 \mathbf{v}$ состоит из двух слагаемых: одно аналогично первому члену в правой части выражения (6.3), только величину Φ нужно заменить на v ; в дополнение к этому имеется еще одно слагаемое (см., например, [309; 387, p. 116]).

В представлении Эйлера уравнение неразрывности для чисто радиального движения можно получить просто из уравнения (4.5), заменив величину $\nabla \cdot \mathbf{v}$ в нем на первый член правой части выражения (6.2).

Если единственной объемной силой является собственное тяготение, то гравитационный потенциал $\psi(r, t)$ для нашей сферической системы должен находиться из решения (4.43) уравнения Пуассона. Нетрудно показать, что в этом случае решение имеет следующий вид:

$$\psi(r) = \begin{cases} -Gm(r)/r - 4\pi G \int_r^R \rho(x) x dx & (r \leq R), \\ -GM/r & (r \geq R). \end{cases} \quad (6.4)$$

Здесь R — радиус звезды, M — ее масса, G — постоянная тяготения, и мы опустили явную зависимость от времени. Величина $m(r)$ — это масса, заключенная внутри сферы радиуса r [см. выражение (6.10)], и, в частности, $m(R) = M$.

Сила тяготения на единицу массы $\mathbf{f} = \mathbf{g} = -g\mathbf{e}_r$ определится, если взять с обратным знаком градиент потенциала (6.4): $\mathbf{f} = -\nabla\psi$. Для локального ускорения силы тяжести g получаем

$$g = Gm(r)/r^2, \quad (6.5)$$

т.е. это сила, действующая на точечный элемент единичной массы, находящийся на поверхности сферы радиусом r и массой m .

Если все напряжения сводятся к чистому термодинамическому давлению P , то уравнение сохранения импульса можно записать по аналогии с (4.17) с необходимыми для рассматриваемого случая видоизменениями.

Уравнение энергии в случае, когда напряжения сводятся к чистому термодинамическому давлению и когда можно пренебречь любыми изменениями химического состава вследствие неравновесных ядерных превращений, может быть записано в виде (4.30 а) или (4.31), где величина dq/dt определяется соотношением (4.40). При наличии сферической симметрии дивергенция полного потока энергии \mathbf{F} равна

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = r^{-2} \partial(r^2 F) / \partial r = (4\pi r^2)^{-1} \partial L_r / \partial r, \quad (6.6)$$

где

$$L_r = 4\pi r^2 F \quad (6.7)$$

есть «текущее значение светимости» или полная скорость потерь энергии через сферу радиуса r .

При лучистом переносе в глубоких звездных недрах поток определяется выражением (4.41).

6.2. Представление Лагранжа

Для сферически симметричного радиального движения уравнение неразрывности в представлении Лагранжа легче всего получить из уравнения (4.13), учитывая, что в этом случае v имеет только радиальную составляющую, равную $\partial r / \partial t$, где r — радиальное расстояние от центра, а символ $\partial / \partial t$ используется в этой главе для обозначения субстанциональной производной. Расстояние r мы считаем функцией от t и a , где a — значение r , соответствующее некоторому предшествующему моменту времени, например $t = 0$. В соответствии с формализмом Лагранжа r и a — это радиальное расстояние до поверхности, ограничивающей некоторое фиксированное значение «текущей массы» m в два различных момента времени [см. уравнение (6.10)]. Используя уравнение неразрывности (4.5) для $\nabla \cdot \mathbf{v}$ в сферически симметричном случае, переходя к независимой переменной a вместо r , меняя местами $\partial / \partial a$ и $\partial / \partial t$ (поскольку переменные a и t независимы), интегрируя по времени t и выбирая постоянную интегрирования так, чтобы при $r = a$ выполнялось равенство $\rho = \rho_0$, получаем

$$\rho / \rho_0 = (a/r)^2 \partial a / \partial r. \quad (6.8)$$

Этот результат обычно записывают в более привычном виде как

$$dm = 4\pi r^2 dr = 4\pi \rho_0 a^2 da,$$

что и выражает постоянство массы dm тонкого сферического слоя, который испытывает радиальные смещения вместе с жидкостью. С другой стороны, уравнение неразрывности можно записать и в следующем виде:

$$\partial r / \partial m = 1 / 4\pi \rho r^2, \quad (6.9)$$

где в качестве независимой пространственной переменной взято текущее значение массы m , определяемое в явном виде соотношением

$$m = \int_0^a 4\pi \rho_0(x) x^2 dx = \int_0^r 4\pi \rho(x, t) x^2 dx. \quad (6.10)$$

Если все напряжения сводятся только к давлению, то уравнение импульса для сферически симметричного радиального движения легко получить из уравнения (4.20), считая, что P зависит только от a (см. выше) и t . Комбинируя это уравнение с уравнением неразрывности (6.8), получаем

$$r = 4\pi r^2 \partial P / \partial m + f(m, t), \quad (6.11)$$

где $\dot{r} = \partial^2 r / \partial t^2$.

Уравнение энергии (4.28) в представлении Лагранжа имеет такой же вид, как в представлении Эйлера. Однако в представлении Лагранжа можно записать:

$$(\nabla \cdot \mathbf{F})/\rho = \partial(4\pi r^2 F)/\partial t = \partial L_r/\partial t, \quad (6.12)$$

где L_r — текущее значение светимости [см. выражение (6.7)]. Таким образом, в данном случае величина $\partial L_r/\partial t$ — это разность (отнесенная к единице массы) между интенсивностью истечения энергии наружу через «верхнюю границу» тонкого сферического слоя вещества и интенсивностью поступления энергии внутрь указанного слоя через его «нижнюю границу».

В заключение этой главы отметим, что уравнения неразрывности, импульса и энергии можно (а иногда и полезно!) объединить в одно дифференциальное уравнение в частных производных, которое обычно является уравнением третьего порядка по времени и четвертого по пространственным координатам (см. ниже).

Сначала продифференцируем по времени уравнение импульса (6.11), заменив в нем $f(m, t)$ на $-g$ [см. формулу (6.5)]. Посредством уравнения импульса можно представить $\partial P/\partial t$ в полученном соотношении через \ddot{r} и Gm/r^2 . В то же время с помощью уравнения энергии [см. (4.30а) и (4.40)] можно выразить производную $\partial P/\partial t$ через $\partial \rho/\partial t$ и $\epsilon - \partial L_r/\partial t$. А $\partial \rho/\partial t$ с помощью уравнения неразрывности можно записать через $\partial(r^2 \dot{r})/\partial t$, учитывая при этом, что производные $\partial/\partial t$ и $\partial/\partial m$ коммутативны, поскольку в представлении Лагранжа величины m и t можно считать независимыми переменными. В итоге получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \ddot{r} - 2\dot{r}\dot{r}/r - 4Gm\dot{t}/r^3 - 4\pi r^2 \partial[4\pi \Gamma_1 P \partial(r^2 \dot{r})/\partial m]/\partial t = \\ = -4\pi r^2 \partial[\rho(\Gamma_3 - 1)(\epsilon - \partial L_r/\partial t)]/\partial t, \end{aligned} \quad (6.13)$$

где Gm/r^3 можно было бы, конечно, выразить через \ddot{r} и $\partial P/\partial t$, если использовать уравнение импульса (6.11), заменив в нем $f(m, t)$ на $-g$. Нерадиальный аналог уравнения (6.13) будет выведен в гл. 14.

Тот факт, что уравнение (6.13) обычно является уравнением четвертого порядка по пространственной координате, можно понять из следующих соображений. В случае лучистого переноса, например, L_r связано с производной $\partial T/\partial t$. Выражая температуру T через давление P и плотность ρ посредством уравнения состояния вещества, мы видим, что L_r связано, в частности, с производной $\partial \rho/\partial t$. Но из уравнения неразрывности [соотношение (6.9)] очевидна связь плотности ρ с производной $\partial r/\partial t$, так что фактически L_r связано с $\partial^2 r/\partial t^2$. Поскольку в правую часть уравнения (6.13) входит $\partial^2 L_r/\partial t^2$, становится ясно, что это уравнение содержит производную $\partial^4 r/\partial t^4$, т.е. в данном случае оно является уравнением четвертого порядка по пространственной координате.

ГЛАВА 7

ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ

В настоящей главе мы приведем основные линеаризованные дифференциальные уравнения для случая чисто радиального сферически симметричного движения. Мы будем использовать описание Лагранжа и сделаем упрощающие предположения, сформулированные в гл. 4 и 6. В разд. 7.1 будут сделаны некоторые вводные замечания, а сами линеаризованные уравнения будут выведены в разд. 7.2 — 7.6. И наконец, в разд. 7.7 мы выведем линеаризованное неадиабатическое уравнение для относительного лагранжесва смещения $\delta r/r$.

7.1. Введение

В этой главе мы получим линеаризованные уравнения для лагранжевых вариаций δf физических переменных f . Независимыми переменными будут служить время t и (часто) текущее значение массы m , которое всегда одинаково в возмущенном и невозмущенном решениях (гл. 5). Следовательно, справедливо уравнение (6.10), в котором верхний предел a в первом интеграле заменен на r_0 , а величины ρ_0 (которая может зависеть и от времени t) и ρ — плотности в невозмущенном и возмущенном решениях соответственно. Очевидно, что оба равенства в указанном выражении в принципе можно было бы разрешить относительно r и r_0 как функций m и t .

Иногда в качестве независимых переменных вместо m и t используют r_0 и t . Однако производная $\partial/\partial r_0$ коммутативна с субстанциональной производной $\partial/\partial t$, только если r_0 не зависит от t (но $\partial/\partial t$ всегда коммутативна с $\partial/\partial m$).

Относительное смещение поверхности сферы с заключенной внутри нее массой m (или, в нестрогом смысле, массового слоя) равно

$$\zeta = \delta r/r_0, \quad (7.1)$$

где r_0 — радиус соответствующей сферы в невозмущенном решении. Тогда в возмущенном решении радиус сферы, охватывающей массу m , равен

$$r = r_0(1 + \zeta). \quad (7.2)$$

Кроме того, мы часто будем оперировать с относительными лагранжевыми вариациями $\delta f/f_0$ некоторой физической величины f . Следовательно, в возмущенном решении имеем

$$f = f_0(1 + \delta f/f_0). \quad (7.3)$$

В линейном приближении принимают, что $|\zeta|$ и $|\delta f/f_0|$ малы по сравнению с единицей, и пренебрегают всеми степенями (выше первой) и всеми произведениями относительных вариаций.

Если не указано особо, то всюду в этой главе, а фактически и во всей части II мы будем полагать, что невозмущенное состояние — это состояние полного равновесия, характеризуемого отсутствием макроскопических движений и

наличием гидростатического и теплового равновесия. Исходя из этого, будем считать, что невозмущенные величины не зависят от времени. Случай, когда звезда не находится в тепловом равновесии, гораздо сложнее и будет кратко рассмотрен в гл. 19.

7.2. Уравнение неразрывности

В случае сферической симметрии линеаризованное уравнение неразрывности можно получить несколькими способами, эквивалентными друг другу. Один из них состоит в том, чтобы применить выражение (7.3) к обеим частям уравнения неразрывности в нелинейной форме (6.9). Более простой путь — рассмотреть оператор лагранжевой вариации δ как обычный дифференциальный оператор и применить его непосредственно к уравнению (6.9), переписанному соответствующим образом, поменяв при этом местами операторы δ и $\partial/\partial t$, что всегда допустимо. В обоих случаях результат можно записать в следующем виде:

$$\delta\rho/\rho_0 = -3\xi - r_0\partial\xi/\partial r_0 \quad (7.4)$$

причем индекс 0 часто опускают.

7.3. Уравнение импульса

Начнем с нелинейного уравнения импульса в виде (6.11), заменив в нем $f(m, t)$ на $-Gm/r^2$. Возьмем теперь лагранжевы вариации δ от всех членов этого уравнения, учитывая, что здесь и всюду в данной части (разд. 7.1) мы принимаем $\dot{r}_0 = 0$ и $\dot{r}_0 = 0$, и снова используем уравнение импульса для невозмущенного состояния. В результате получим

$$\delta\dot{r} = 4Gm\xi/r_0^2 - 4\pi r_0^2 \partial\delta P/\partial m. \quad (7.5)$$

Оба члена в правой части уравнения (7.5) имеют простой и понятный физический смысл. Первый член — это возвращающая сила на единицу массы, действующая на смещенный слой вещества, причем эта сила вызывается только геометрическими эффектами. Половина ее обусловлена тем, что в механике Ньютона сила тяготения обратно пропорциональна квадрату расстояния. Вторая же половина обусловлена тем, что на сфере радиуса r суммарная сила давления, направленная наружу, пропорциональна r^2 [множитель $4\pi r^2$ в первом члене правой части уравнения (6.11)]. Отметим, что возвращающая сила, представленная первым членом в правой части уравнения (7.5), пропорциональна величине ξ . Это значит, что данная составляющая полной возвращающей силы всегда действует в направлении смещения: например, если слой вещества смещается наружу, то будет возникать составляющая полной возвращающей силы, также направленная наружу.

Смысл второго члена в правой части уравнения (7.5), вероятно, станет более понятным, если перед выполнением дифференцирования по массе разделить и умножить δP на P_0 . После дифференцирования мы снова используем уравнение импульса для невозмущенной конфигурации. Тогда этот член будет

приближенно равен $(Gm/r_0^2) \delta P/P_0$ (такое приближение справедливо, если величина $\partial(\delta P/P_0)/\partial t$ мала). Поэтому рассматриваемый член представляет собой возвращающую силу на единицу массы, обусловленную, по существу, изменением давления δP , сопровождающим смещение. Заметим, что с вышеуказанной оговоркой данная сила имеет тот же знак, что и δP , и является, например, отрицательной (т.е. направлена внутрь), если при смещении слоя наружу δP уменьшается. Таким образом, при смещении слоя вещества, скажем, наружу суммарная возвращающая сила, сопровождающая это смещение, может быть отрицательной (т.е. направленной внутрь) только в случае достаточно сильного уменьшения давления при расширении. Приведенные соображения полезны для физического понимания динамической устойчивости звезд.

Иногда удобно использовать еще одну форму линейризованного уравнения импульса, которая получается, если записать $x = r_0/R_0$, $dm = 4\pi r_0^2 \rho_0 dr_0$ и разрешить уравнение относительно $\partial(\delta P/P_0)/\partial x$. Опуская индекс 0, имеем в результате

$$\partial(\delta P/P)/\partial x = (R/\lambda_p)[4\zeta - (xR/g)\zeta^2 + \delta P/P], \quad (7.6)$$

где

$$\lambda_p = -dr/d\ln P = P/\rho g \quad (7.7)$$

есть локальная высота однородной атмосферы в равновесной модели, а g — локальное ускорение силы тяжести [уравнение (6.5)].

7.4. Уравнение энергии

Для рассматриваемого случая полного равновесия в невозмущенном состоянии (разд. 7.1) и пренебрежимо малых изменений химического состава вследствие неравновесных ядерных реакций можно записать линейризованное уравнение энергии, например, в следующем виде:

$$\partial(\delta P/P)/\partial t = \Gamma \partial(\delta \rho/\rho)/\partial t + [\rho(\Gamma_3 - 1)/P] \delta(\epsilon - \partial L_r/\partial m), \quad (7.8)$$

где L_r — текущее значение светимости [см. формулу (6.7)]. Подобное этому выражение можно записать и для величины $\delta T/T$. Отметим, что

$$\delta(\epsilon - \partial L_r/\partial m) = \epsilon_0 \delta \epsilon/\epsilon_0 - (dL_{r,0}/dm) \delta L_r/L_{r,0} - L_{r,0} \partial(\delta L_r/L_{r,0})/\partial m, \quad (7.9)$$

где, как обычно, индекс 0 относится к величинам в невозмущенном состоянии звезды. В состоянии теплового равновесия $\epsilon_0 = dL_{r,0}/dm$. Кроме того, снаружи от областей генерации энергии $\epsilon_0 = 0$, а $L_{r,0}$ не зависит от m и равно полной светимости звезды L . В таком случае в уравнении (7.9) остается только последний член.

Для термодинамически обратимых процессов имеем

$$\delta(\epsilon - \partial L_r/\partial m) = T_0 \partial \delta s/\partial t, \quad (7.10)$$

где s — удельная энтропия. Это уравнение справедливо, если $\partial s_0/\partial t = 0$, что эквивалентно предположению $\epsilon_0 = dL_{r,0}/dm$.

Иногда бывают полезны также и общие термодинамические тождества (5.35а) и (5.35б).

7.5. Приближение лучистой теплопроводности

В приближении лучистой теплопроводности (справедливом в глубоких звездных недрах, см. разд. 4.3) для текущего значения светимости L , имеет место соотношение вида (4.41). Беря логарифмические лагранжевы вариации от всех членов этого уравнения, получим

$$\delta L_r/L_{r,0} = 4\zeta - \delta\kappa/\kappa_0 + 4\delta T/T_0 + (d\ln T_0/dr_0)^{-1}\partial(\delta T/T_0)/\partial r_0 = (7.11a)$$

$$= 4\zeta - n\delta\rho/\rho_0 + (s+4)\delta T/T_0 + (d\ln T_0/dr_0)^{-1}\partial(\delta T/T_0)/\partial r_0, \quad (7.11b)$$

где второе равенство относится к случаю, когда непрозрачность имеет вид $\kappa \propto \rho^n T^{-s}$.

Следует обратить внимание на относительно большой коэффициент при $\delta T/T_0$ в уравнении (7.11b). При $s \approx 3$ (что типично для звездных недр) этот множитель принимает значение $(s+4) \approx 7$. Кроме того, известно (см. [146, Ch. 20; 500]), что во внешних слоях звезд (но глубже области ионизации водорода), где $L_{r,0} \approx L$ и $m \approx M$ (полная масса звезды), температура изменяется с глубиной, по-видимому, весьма простым образом, и мы приходим к заключению, что последний член в уравнении (7.11b) может быть довольно малым, если в указанных областях величина $\partial(\delta T/T_0)/\partial r_0$ не особенно велика. Следовательно, в уравнении (7.11b) часто преобладает член, содержащий множитель $(s+4)$. Приведенные соображения означают, что во многих случаях локальный лучистый поток может быть более чувствительным к самой локальной температуре, чем к ее градиенту.

Однако во внешних частях зоны ионизации водорода показатель степени s при температуре обычно становится большим по модулю и отрицательным. Такое поведение обусловлено в основном сильной зависимостью электронной концентрации в этих областях от температуры. А поскольку вследствие этого непрозрачность κ круто возрастает с глубиной, величина $|dT_0/dr_0|$ должна стать в таких областях очень большой, если необходимо, чтобы перенос энергии из глубоких недр осуществлялся излучением. Следовательно, упомянутое утверждение о простом поведении температуры T_0 как функции расстояния r_0 не имеет здесь никакой силы (см. [146, Ch. 20]). В данном случае ситуация гораздо сложнее, чем рассмотренная выше, и последним членом в уравнении (7.11b) уже нельзя пренебречь (см. гл. 11).

Изменения, необходимые, чтобы уравнения диффузии были применимы в оптически толстых слоях, описаны, например, в статье Унно [588, App. A].

7.6. Скорость генерации термоядерной энергии

В простейшем случае, когда скорость генерации термоядерной энергии на единицу массы можно аппроксимировать соотношением $\epsilon \sim \rho^\lambda T^\nu$, имеем

$$\delta\epsilon/\epsilon_0 = \lambda\delta\rho/\rho_0 + \nu\delta T/T_0. \quad (7.12)$$

В этом выражении мы пренебрегли любыми изменениями химического состава и любыми фазовыми запаздываниями в энерговыделении (см. [128; 345;

§ 66; 466; 490)). Однако изменения химического состава иногда необходимо учитывать (например, [87, 136, 395]).

7.7. Линеаризованное неадиабатическое уравнение для $\delta r/r$

В данном разделе мы объединим линеаризованные уравнения неразрывности, импульса и энергии, чтобы получить линейное дифференциальное уравнение третьего порядка (по времени) в частных производных, описывающее поведение величины $\xi \equiv \delta r/r_0$ для неадиабатических радиальных звездных пульсаций.

Начнем с линеаризованного уравнения импульса (7.5) и найдем субстанциональные производные $\partial/\partial t$ от всех его членов, предварительно записав $\delta P = P_0(\delta P/P_0)$. В полученном уравнении $\partial(\delta P/P_0)/\partial t$ можно исключить с помощью уравнения энергии в виде (7.8), из которого в свою очередь производную $\partial(\delta \rho/\rho_0)/\partial t$ можно исключить с помощью уравнения неразрывности (7.4). Подставляя два эти выражения в продифференцированное указанным образом уравнение (7.5), после небольших преобразований получим

$$\begin{aligned} r_0 \ddot{\xi} = & 4\pi r_0^2 d[(3\Gamma_{1,0} - 4)P_0]/dm + 12\pi r_0^2 \Gamma_{1,0} P_0 \partial \xi / \partial m + \\ & + 16\pi^2 r_0^2 \partial(r_0^3 \Gamma_{1,0} P_0 \rho_0 \partial \xi / \partial m) / \partial m - \\ & - 4\pi r_0^2 \partial[\rho_0(\Gamma_3 - 1)\delta(\epsilon - \partial L / \partial m)] / \partial m. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Однако с помощью уравнения неразрывности (7.4), записав множитель r_0^6 как $r_0^3 \cdot r_0^3$, легко доказать следующее тождество:

$$\begin{aligned} (4\pi/r_0) \partial(4\pi \Gamma_{1,0} P_0 \rho_0 r_0^6 \partial \xi / \partial m) / \partial m = & 12\pi \Gamma_{1,0} P_0 r_0^2 \partial \xi / \partial m + \\ & + 16\pi^2 r_0^2 \partial(\Gamma_{1,0} P_0 \rho_0 r_0^3 \partial \xi / \partial m) / \partial m. \end{aligned} \quad (7.14)$$

В результате уравнение (7.13) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} - 4\pi r_0 d[(3\Gamma_{1,0} - 4)P_0]/dm - r_0^{-2} \partial(16\pi^2 \Gamma_{1,0} P_0 \rho_0 r_0^6 \partial \xi / \partial m) / \partial m = \\ = -4\pi r_0 \partial[\rho_0(\Gamma_3 - 1)\delta(\epsilon - \partial L / \partial m)] / \partial m. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Это и есть искомое уравнение.

Отметим, что уравнение (7.15) можно было бы вывести и более прямым путем, если взять лагранжевы вариации от всех членов полученного в разд. 6.2 общего нелинейного дифференциального уравнения в частных производных для величины r [уравнение (6.13)].

ГЛАВА 8

ЛИНЕЙНЫЕ АДИАБАТИЧЕСКИЕ РАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

В настоящей главе мы рассмотрим случай малых, чисто радиальных адиабатических колебаний самогравитирующей газовой сферы относительно ее равновесного состояния. Примем, что равновесное состояние характеризуется

статическим ($\dot{r} = 0$) сферически симметричным распределением вещества, в котором изменения химического состава, обусловленные ядерными превращениями, пренебрежимо малы и которое находится в гидростатическом и тепловом равновесии ($\dot{r}_0 = 0, \varepsilon_0 - dL_{r,0}/dm = 0$ соответственно). Кроме того, сделаем и другие упрощающие предположения, сформулированные в начале гл. 4 и в начале гл. 6. Превосходное, математически строгое рассмотрение многих вопросов, обсуждаемых в данной главе, содержится в работе Леду и Вальравена [345, §58 — 62].

Рассматриваемый случай малых адиабатических колебаний является несколько идеализированным, однако в большинстве приложений он дает хорошее динамическое описание многих свойств реальных пульсирующих звезд. В частности, такой подход дает весьма точные значения периодов пульсаций и довольно надежные результаты для относительной амплитуды пульсаций внутри звезды. Как подчеркивается в гл. 9, правильность получаемых результатов обусловлена в основном тем, что пульсации действительно являются приблизительно адиабатическими почти по всей звезде. Обсуждаемый подход имеет и историческое значение. Математическая теория берет свое начало от работ Эддингтона [195, 196], опубликованных в 1918 г. Будучи простейшим, данный случай служит естественной отправной точкой для теоретического изучения пульсирующих звезд.

Поскольку предполагается, что колебания происходят адиабатически (т.е. осциллирующие элементы вещества не теряют и не приобретают тепло), очевидно, что этот подход не может дать непосредственной информации о тепловом поведении звезды. Например, такая теория не в состоянии предсказать, как в ходе пульсаций изменяется светимость пульсирующей звезды, поскольку этот эффект несомненно является неадиабатическим (гл. 9). Более того, обсуждаемая теория не в состоянии ответить на вопрос о причине пульсаций, т.е. о пульсационной неустойчивости звезды. Дело здесь в том, что любые малые начальные колебания будут всегда сохранять одну и ту же амплитуду, поскольку предположение адиабатичности (при отсутствии диссипативных эффектов, таких, как вязкость) означает, что система является идеально консервативной.

С другой стороны, рассматриваемая теория может дать информацию о динамической устойчивости звезды. Этот вопрос мы попутно затронем в некоторых разделах настоящей главы.

В разд. 8.1 будет рассмотрен ряд общих соображений, включая вывод линейного адиабатического волнового уравнения. Решения типа стоячей волны для этого уравнения и некоторые условия их существования будут рассмотрены в разд. 8.2 и 8.4 соответственно, а в разд. 8.3 будут обсуждены граничные условия для решений такого вида. В разд. 8.5 мы отметим, что в математическом смысле проблема звездных пульсаций, как и большинство проблем связанных с колебаниями, представляет собой задачу о собственных значениях. Как будет показано в разд. 8.6, важное соотношение период — средняя плотность является логическим следствием линейного адиабатического волнового уравнения. В разд. 8.7 мы исследуем некоторые аспекты звездных пульсаций преимущественно с физической точки зрения, а математическое обсуждение

собственных значений будет проведено в разд. 8.8. В разд. 8.10 будет описано важное и полезное вариационное свойство собственных значений. Некоторые условия существования осциллирующих решений для произвольных звездных моделей будут рассмотрены в разд. 8.9. В разд. 8.11 будет дана интересная физическая интерпретация ряда ранее полученных выражений. В разд. 8.12 будет описано несколько практических методов решения линейного адиабатического волнового уравнения, а также изложены некоторые результаты для избранных звездных моделей. В разд. 8.13 мы обсудим хорошо известные результаты Эпштейна (и ряд более поздних результатов), касающиеся того, какие области в звезде оказывают наибольшее влияние на период. Влияние пространственной переменности адиабатического показателя Γ_1 в звездной оболочке на периоды пульсаций будет рассмотрено в разд. 8.14. И наконец, в разд. 8.15 будут представлены и обсуждены несколько приближенных формул и результатов для собственных значений.

8.1. Общие соображения

В теории малых адиабатических колебаний уравнения энергии (5.34а) и (5.34б) для принятых условий можно заменить более простыми уравнениями (5.36а) и (5.36б), где индекс 0 (который часто опускают) обозначает равновесное состояние системы.

Дифференциальное уравнение, описывающее такие колебания, можно получить, если подставить выражение (5.36а) в линеаризованное уравнение импульса и с помощью линеаризованного уравнения неразрывности выразить величину $\delta\rho/\rho_0$ через относительное смещение $\xi (= \delta r/r_0)$. В результате после некоторых преобразований будем иметь следующее уравнение:

$$r_0 \ddot{\xi} = \xi \cdot 4\pi r_0^2 d[(3\Gamma_{1,0} - 4)P_0]/dm + (1/r_0)\partial(16\pi^2\Gamma_{1,0}P_0\rho_0 r_0^6 \partial\xi/\partial m)/\partial m, \quad (8.1)$$

где в качестве независимых переменных используются текущее значение массы m и время t , а точки над символами означают субстанциональные производные. Это уравнение можно было бы получить и из линеаризованного неадиабатического уравнения (7.15), отбросив в нем последний член и затем проинтегрировав по времени. Постоянную интегрирования выбирают равной нулю, чтобы условие $\xi = 0$ соответствовало равновесному (или статическому) состоянию системы.

Отметим, что производя замену $\partial/\partial m = (4\pi r_0^2 \rho_0)^{-1} \partial/\partial r_0$ и опуская затем индекс 0, мы можем записать уравнение (8.1) через смещение δr и его временные и пространственные производные. Коэффициенты при δr и $\partial(\delta r)/\partial r$ таковы, что они, как правило, претерпевают значительные изменения на расстояниях, сравнимых с радиусом звезды R . Таким образом, при описании звездных пульсаций мы обычно имеем дело с задачами длинноволновой акустики. Однако для достаточно высоких «мод» пространственная длина волны возмущения δr мала по сравнению с радиусом R , и поэтому результирующее уравнение становится по существу уравнением для малых адиабатических звуковых волн (разд. 5.5).

В качестве простого примера можно рассмотреть гомологическое движе-

ние, характеризуемое тем, что относительное смещение ζ одинаково по всей звезде, т.е. не зависит от m . Этот пример, хотя и далекий от действительности, позволяет быстро понять существо дела. Предположим также, что величина Γ_1 постоянна. Тогда из уравнения (8.1) (использував в нем условие гидростатического равновесия для равновесной модели) имеем

$$\ddot{\zeta} = -(3\Gamma_1 - 4)Gm\zeta/r^3. \quad (8.2)$$

Отсюда сразу видно, что осциллирующие решения ($\zeta \propto \exp(i\sigma t)$ при вещественном σ) существуют только при $\Gamma_1 > 4/3$. В этом случае квадрат угловой частоты пульсаций равен

$$\sigma^2 = (2\pi/\Pi)^2 = (3\Gamma_1 - 4)Gm/r^3, \quad (8.3)$$

где Π — период пульсаций. При $\Gamma_1 < 4/3$ имеем $\sigma^2 < 0$, что соответствует апернодическому движению в динамической шкале времени. Такая ситуация представляет собой *динамическую неустойчивость*. Ниже, в разд. 8.9, мы покажем, что выводы относительно $\Gamma_1 \gtrless 4/3$ справедливы также и в общем случае.

Из уравнения (8.3) ясно, что поскольку величина σ^2 постоянна, адиабатические гомологические колебания в модели с $\Gamma_1 \neq 4/3$ возможны только для однородной модели, характеризуемой постоянной плотностью

$$\rho(m) = \bar{\rho} = 3M/4\pi R^3 = \text{const}, \quad (8.4)$$

где M и $\bar{\rho}$ — масса и средняя плотность звезды. Как мы увидим в гл. 12, указанное условие существования гомологических колебаний однородной модели с $\Gamma_1 \neq 4/3$ применимо и к случаю нелинейных пульсаций. Однако если $\Gamma_1 = 4/3$, то $\sigma^2 = 0$ для любой равновесной модели, в которой величина ζ зависит только от времени t . Следовательно, при $\Gamma_1 = 4/3$ в случае адиабатических движений любая звездная модель может испытывать гомологическое расширение или сжатие. Как мы увидим в гл. 12, этот вывод справедлив и в нелинейном случае.

8.2. Решение типа стоячей волны для линейного адиабатического волнового уравнения

Предположим теперь, что для уравнения (8.1) существуют решения типа стоячей волны, имеющие следующий вид:

$$\zeta(r, t) = \delta r/r = \xi(r) e^{i\sigma t}, \quad (8.5)$$

где $\xi(r)$ зависит только от r , а σ — некоторая постоянная. (Представление $\delta r/r$ в комплексном виде в (8.5) принято для упрощения математических выкладок. Однако физический смысл имеет только вещественная часть комплексного числа, стоящего в правой части второго равенства (8.5). В данной книге мы будем напоминать об этом лишь по мере необходимости.) Условие существования решений типа стоячей волны будет рассмотрено в разд. 8.4. Подставляя выражение (8.5) в уравнение (8.1), производя замену

$\partial/\partial t = (4\pi\rho\sigma_0^2)^{-1}\partial/\partial r_0$ и опуская индекс 0, после простых преобразований получим

$$d(\Gamma_1 P r^4 d\xi/dr)/dr + \xi[\sigma^2 p r^4 + r^3 d[(3\Gamma_1 - 4)P]/dr] = 0. \quad (8.6)$$

Это уравнение иногда называют линейным адиабатическим волновым уравнением. С другой стороны, такое же название используют и для уравнения (8.1) или даже для его аналогов в более общих случаях (см., например, гл. 15).

В разд. 8.8 мы покажем, что величина σ^2 всегда вещественна, поэтому все коэффициенты в уравнении (8.6) оказываются вещественными, откуда следует, что существуют чисто вещественные решения $\xi(r)$, а значит, стоячие волны возможны в действительности. Поэтому в колебательном движении величина $\text{Re}[\xi(r, t)]$ дважды в течение каждого периода всюду обращается в нуль. Поскольку при адиабатических колебаниях величины δP , δT , $\delta\rho$ и др. пропорциональны $\xi(r, t)$ [см. формулы (5.36) и (7.4)], все они в эти же моменты времени должны везде обращаться в нуль. Иными словами, звезда дважды в течение каждого периода проходит через свое равновесное состояние.

8.3. Граничные условия

Для обсуждения граничных условий, обычно налагаемых на уравнение (8.6), удобно было бы представить это уравнение в другой форме [записав в нем отдельно первую и вторую производные от ξ и поделив все члены на ρr^4 — *Ред.*]. Имея это в виду, мы не будем, однако, выписывать преобразованное таким образом уравнение (8.6) в явном виде.

В центре симметрин ($r = 0$), очевидно, должно выполняться условие

$$\delta r = 0. \quad (8.7)$$

В физических задачах интерес обычно представляют только регулярные решения. Такие решения характеризуются конечными значениями ξ и ее производных во всей рассматриваемой области и, в частности, в центре звезды. Вследствие множителя $4/r$ коэффициент при $d\xi/dr$ в упомянутой модифицированной уравнения (8.6) имеет в центре звезды особенность, поэтому указанное условие регулярности требует, чтобы при $r = 0$ выполнялось условие

$$d\xi/dr = 0. \quad (8.8)$$

На поверхности (при r , равном радиусу звезды R) обычно принимается, что давление P обращается в нуль (ниже в этом разделе будет рассмотрена ситуация, когда это условие не выполняется). Такое предположение означает, что при $r = R$

$$\delta P = 0. \quad (8.9)$$

Конкретный вид граничного условия на поверхности зависит от граничных условий, принятых в равновесной модели. Как правило, достаточно удовлетворительным является предположение, что на поверхности звезды величина P/ρ (пропорциональная температуре T в уравнении состояния идеального газа) становится пренебрежимо малой. В таком приближении можно

получить явное выражение для граничного условия на поверхности в задаче о пульсациях [см. уравнение (8.11)].

Чтобы провести довольно общий анализ граничных условий на поверхности, можно начать с линеаризованного уравнения импульса в форме (7.6), приняв, что $\xi \propto \exp[i\sigma t]$. Тогда имеем

$$\partial(\delta P/P)/\partial x = (R/\lambda_p)[\sigma^2 r/g + 4]\xi + \delta P/P, \quad (8.10)$$

где $x = r/R$, λ_p — локальная высота однородной атмосферы [см. выражение (7.7)], а g — локальное ускорение силы тяжести [см. выражение (6.5)]. Поскольку в реальных звездах на уровне фотосферы обычно $R/\lambda_p \gg 1$ (и поскольку на поверхности $R/\lambda_p = \infty$, если предполагается, что там $P/\rho = 0$), то в качестве граничного условия на поверхности достаточно обоснованно принять, что величина в квадратных скобках в уравнении (8.10) обращается в нуль, т.е.

$$\delta P/P = -(\sigma^2 r/g + 4)\xi, \quad (8.11)$$

что верно по крайней мере с точностью до множителя $[1 + O(\lambda_p/R)]$ в правой части, где величина $O(\lambda_p/R)$ может представлять собой ряд по степеням λ_p/R , главный член которого порядка λ_p/R . Подставляя (8.11) в (8.10), видим, что величина $\delta P/P$ не может иметь никаких особенностей в поверхностных областях.

Отметим, что при выводе уравнения (8.11) не делалось никаких предположений об адиабатичности колебаний, а поэтому оно справедливо и для неадиабатических (но малых) колебаний.

Можно показать, что уравнение (8.11) гарантирует также отсутствие особенностей в поведении величины ξ вблизи поверхности звезды (т.е. обеспечивает конечность ξ и $d\xi/dr$ при $r \rightarrow R$).

Отсюда следует, что характерный пространственный масштаб изменений как $\delta P/P$, так и ξ порядка R (радиуса звезды), а не λ_p (толщины звездной атмосферы; см., например, [146, Ch. 20]). Таким образом, относительные изменения, которые могут испытывать величины $|\delta P/P|$ и $|\xi|$ в звездной атмосфере, составляют по порядку величины λ_p/R , а эта величина обычно мала по сравнению с единицей. Поэтому во всей тонкой холодной атмосфере эти величины почти постоянны (см., однако, замечание в конце следующего раздела).

Можно отметить, что результат

$$\partial(\delta P/P)/\partial r = 0 \quad (8.12)$$

является точным для плоскопараллельной атмосферы, если в ней ускорение силы тяжести g на поверхности лишь «медленно» (см. ниже) изменяется со временем. При таких условиях мгновенное гидростатическое равновесие означает, что давление P на любом уровне в атмосфере как раз равно отнесенному к единице площади весу вещества, лежащего над этим уровнем. В таком случае при фиксированном значении текущей массы $\delta P/P \approx \delta g/g = \text{const}$ относительно r , откуда и следует выражение (8.12).

Под «медленными» изменениями подразумеваются такие изменения в ат-

мосфере, связанные с пульсациями, для которых характерное время (т.е. период Π) велико по сравнению с естественным «временем релаксации» атмосферы, скажем t_a . В качестве такого времени можно взять время, за которое элемент с единичной массой, свободно падающий под действием ускорения силы тяжести на поверхности g , преодолевает расстояние, сравнимое с величиной λ_p . Тогда элементарные выкладки с использованием приближенного соотношения (2.8) показывают, что по порядку величины

$$t_a/\Pi \sim (\lambda_p/R)^{1/2}, \quad (8.12)$$

т.е. время релаксации атмосферы много меньше периода пульсаций, если $\lambda_p/R \ll 1$.

Таким образом, граничное условие (8.11) подразумевает наличие некоторого вида «квазигидростатического равновесия», при котором атмосфера пассивно «плавает» на поднимающихся и опускающихся внутренних облаках, почти так же, как качающийся на волнах поплавочек.

В случае адиабатических колебаний в уравнении (8.11) нужно просто заменить $\delta P/P$ на $\Gamma_1 \delta \rho/\rho$, а для $\delta \rho/\rho$ использовать линеаризованное уравнение неразрывности (7.4).

Кастор [68] отметил, что если на поверхности звезды существенную роль играет давление излучения, то граничное условие (8.11) следует относить только к газовому давлению P_g , т.е. величину P там нужно заменить на P_g . Этот вывод можно понять, если в уравнении (8.10) использовать выражение (7.7) для величины λ_p . Тогда станет ясно, что правильное общее граничное условие на поверхности (если на поверхности $\rho = 0$) имеет следующий вид:

$$\partial(\delta P)/\partial r = 0 \quad (8.14)$$

при $r = R$. Если теперь проинтегрировать выражение для $\partial(\delta P)/\partial r$, следующее из (8.10), используя в нем уравнение гидростатического равновесия, учесть приближительное постоянство величин r , g и ξ в окрестности $r = R$ и применить полученное выражение к достаточно высокому уровню в атмосфере, чтобы выполнялось условие $\rho = 0$, то мы получим результат Кастора.

Когда давление излучения играет важную роль, для адиабатических колебаний можно получить еще более общее поверхностное граничное условие, чем выведенное из уравнения (8.11). Если приближенно записать, что $P_r \propto T^4/3$ (это соотношение строго выполняется только в глубоких недрах) и использовать результат Кастора [т.е. уравнение (8.11) с заменой P на P_g], то в итоге получим для случая адиабатических колебаний следующее условие на уровне $x = 1$:

$$d \ln \xi / d \ln x = [(\sigma^2 R^3 / GM) \beta - (3\Gamma_1 - 4\beta) + 12(\Gamma_3 - 1)(1 - \beta)] / [\Gamma_1 - 4(\Gamma_3 - 1)(1 - \beta)], \quad (8.15)$$

где β — отношение газового давления к полному (сумме газового давления и давления излучения):

$$\beta = P_g / (P_g + P_r). \quad (8.16)$$

Уравнение (8.15) дает правильные соотношения в предельных случаях $\beta = 0$ и

1, как можно показать с помощью выражений для величин Γ_i для идеального газа и равновесного излучения (см., например, [71, гл. 2]).

Приведенные граничные условия (или их эквиваленты) иногда в совокупности называют «граничными условиями для стоячей волны» (разд. 8.4).

Очень подробное обсуждение поверхностных граничных условий в линейной теории содержится в [588].

8.4. Условие существования стоячих волн в звездных недрах

Для существования решения типа стоячей волны вида $\zeta(r, t) = \xi(r) \exp[i\omega t]$ требуется, чтобы волна (в данном случае звуковая), приходящая из звездных недр, испытывала на поверхности звезды полное отражение. В настоящем разделе мы исследуем условия такого отражения на примере малых адиабатических колебаний тонкой плоскопараллельной изотермической атмосферы (см. [37; 345, § 68; 588]). Известно, что на малых оптических глубинах звездные атмосферы, как правило, изотермичны (см., например, [146, Ch. 20]). В таких изотермических атмосферах как давление P , так и плотность ρ экспоненциально убывают с увеличением высоты: $P, \rho \propto \exp[-(r - R)/\lambda_p]$, где λ_p — высота однородной атмосферы [см. уравнение (7.7)], принимаемая здесь постоянной. Кроме того, примем для простоты, что и показатели адиабаты Γ_i постоянны (как во времени, так и в пространстве).

При этих упрощающих предположениях и с учетом $\lambda_p/R \ll 1$ линейное адиабатическое волновое уравнение становится линейным дифференциальным уравнением второго порядка относительно ξ с постоянными коэффициентами. Уравнение имеет следующий вид:

$$d^2\xi/dx^2 - (1/\lambda_p)d\xi/dx + (\sigma^2/v_s^2)\xi = 0, \quad (8.16')$$

где x — высота в атмосфере, отсчитываемая от некоторого произвольно выбранного уровня. Такое уравнение имеет решения вида $\delta r \propto \xi \propto e^{kx}$, где k — волновое число для стоячих волн, определяемое решением квадратного уравнения.

Рассматривая решение этого уравнения, можно выделить два случая. Первый — назовем его случаем (а) — характеризуется вещественными значениями k и имеет место при $\sigma\lambda_p/v_s < 1/2$, где $v_s = (\Gamma_1 P/\rho)^{1/2}$ — адиабатическая скорость звука, которая также принята постоянной в атмосфере. Пусть k_1 и k_2 — решения квадратного уравнения, и пусть $k_1 < k_2$; если записать $k = 2\pi/\lambda$, где λ — длина волны, соответствующая волновому числу k , то имеем $\lambda_1 > \lambda_2$. Следовательно, решение k_1 связано с более длинными звуковыми волнами, чем k_2 , и характеризуется более медленным ростом амплитуды с высотой, чем k_2 . Можно показать, что при $\sigma\lambda_p/v_s \ll 1$ $\lambda_1 \gg \lambda_p$, поэтому такая ситуация соответствует «длинным» звуковым волнам. Подобным же образом получаем $\lambda_2 \approx 2\pi\lambda_p$; решение k_2 в этом случае соответствует «коротким» звуковым волнам.

Теперь необходимо исследовать, имеют ли эти решения физический смысл. Рассмотрим акустическую энергию на единицу объема. Эта энергия

пропорциональна кинетической энергии на единицу объема, скажем K . Легко показать, что при $x \rightarrow \infty$ энергия $K_1 \rightarrow 0$, а $K_2 \rightarrow \infty$. Из-за расходимости величины K_2 на бесконечности решение k_2 , вероятно, не имеет физического смысла (см., однако, замечание в конце настоящего раздела). Поэтому единственное имеющее физический смысл решение в случае (а) таково:

$$\delta r \propto \exp(i\omega t) \exp[\sigma^2 \lambda_p^2 / v_s^2 (x/\lambda_p)] \quad (\sigma^2 \lambda_p^2 / v_s^2 \ll 1), \quad (8.17)$$

причем в свете наших упрощающих предположений данное решение не справедливо при $x/\lambda_p \gg 1$. Следовательно, экспоненциальное поведение смещения δr в выражении (8.17) не противоречит нашим выводам, сделанным в разд. 8.3 о том, что для стоячих волн, представляющих интерес в случае пульсаций всей звезды, δr не может претерпевать очень сильных изменений в тонких атмосферных слоях.

Теперь мы рассмотрим случай (б): $\sigma \lambda_p / v_s > 1/2$. Здесь оба корня вышеупомянутого квадратного уравнения являются комплексными. Комплексные значения k соответствуют бегущим волнам, причем в общем случае одна волна распространяется к центру звезды, а другая — от центра. Поскольку с физической точки зрения допустимо существование только выходящих волн, решение, дающее волны, распространяющиеся к центру, должно быть отброшено. Можно показать также, что в случае (б) действительно происходит потеря энергии звездой в форме бегущих акустических волн.

Таким образом, стоячие волны в звездных недрах могут существовать только в случае (а), т.е. при $\sigma \lambda_p / v_s < 1/2$. Если записать $v_s = (\sigma/2\pi)\lambda$, где λ — длина звуковых волн, соответствующих угловой частоте $2\pi/\Pi$ (Π — рассматриваемый период пульсаций), то условие существования стоячих волн в звездных недрах имеет вид

$$\lambda > 4\pi\lambda_p, \quad (8.18)$$

где λ_p — высота однородной атмосферы.

Отметим, что дифференцирование уравнения (8.17) по r после небольших преобразований приводит к уравнению (8.15) при $\beta = 1$, в котором величина $3\Gamma_1 - 4$ заменена на Γ_1 . Причиной такого различия является пренебрежение кривизной атмосферы в настоящем разделе. Если бы кривизна учитывалась, то был бы получен тот же множитель, что и в уравнении (8.15) (см., например, [37, Appendix]).

Однако для низших мод пульсирующих звезд имеем $\lambda \sim R$ (R — радиус звезды). Поэтому условие (8.18) принимает следующий приближенный вид: $R \gg \lambda_p$. Но с помощью теоремы вириала можно показать, что в довольно общем случае отношение λ_p/R по порядку величины равно отношению внутренней энергии на единицу массы на поверхности и в центре. Если рассматриваются обычные газовые звезды, в которых давление излучения не очень существенно, то приведенное утверждение означает, что для большинства звезд

$$\lambda_p/R \sim \frac{\text{Температура на поверхности}}{\text{Температура в центре}} \sim 10^{-2} - 10^{-4}. \quad (8.19)$$

Поэтому условие (8.18), вероятно, с хорошей точностью выполняется для низших мод пульсаций большинства звезд. Однако для высших мод данное условие, возможно, не выполняется. Кроме того, наличие высокотемпературной короны могло бы привести к неполному отражению и, следовательно, к распространению волн в корону, особенно для высших мод (см., например, [491]). Более того, существование высокотемпературной короны или какие-то другие факторы могли бы при некоторых условиях повлечь за собой необходимость исследования решения k_2 в случае (а) (см., например, [286]), а также ряд статей в [270]). Однако в данной части мы не будем проводить такое исследование.

8.5. Проблема линейных адиабатических радиальных пульсаций как задача о собственных значениях

Уравнение (8.6) — это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, и, значит, его решение должно включать две постоянные интегрирования. Однако данное уравнение является также линейным и однородным по ξ , следовательно, одна из постоянных должна остаться произвольной (если ξ — решение, то решением будет и величина $A\xi$, где A — произвольная постоянная). С физической точки зрения произвольным должно быть абсолютное значение амплитуды пульсаций ξ . Вторую же постоянную интегрирования, очевидно, можно использовать для того, чтобы добиться выполнения одного из двух граничных условий: в центре или на поверхности. Единственный оставшийся в распоряжении параметр — это σ , угловая частота пульсаций. Ее значение следует варьировать до тех пор, пока не будет удовлетворено другое граничное условие. Следовательно, существуют только определенные собственные частоты $\sigma_0, \sigma_1, \dots$ и соответствующие собственные функции ξ_0, ξ_1, \dots , которые удовлетворяют граничным условиям в центре и на поверхности. Вообще говоря, существует бесконечное множество собственных частот и соответствующих собственных функций, и значения собственных частот в общем не кратны значению самой низкой, или основной, собственной частоты σ_0 . Собственная функция ξ_0 основной моды не имеет нулей или узлов в области $0 \leq r \leq R$, а собственная функция ξ_k для k -й моды имеет ровно k узлов в этой области. В данной части книги мы будем иметь дело главным образом только с основной или низшими модами (см. сноску в разд. 8.12в).

Приведенные утверждения (вместе с их доказательствами) следуют из того факта, что уравнение (8.6) относится к уравнениям типа *Штурма — Лиувилля*, которые широко представлены в математической литературе (см., например, [282, ch. 9 — 11; 345, § 58]).

В работе [23] отмечены некоторые очень интересные и способствующие более ясному пониманию параллели между линейным адиабатическим волновым уравнением и уравнением Шредингера в квантовой механике. Еще раньше несколько соображений на эту тему были высказаны в статье [367].

8.6. Соотношение период — средняя плотность

В данном разделе мы покажем, что из линейного адиабатического волнового уравнения следует соотношение период — средняя плотность для пульсирующих звезд (см., например, гл. 2).

Это уравнение можно привести к безразмерному виду [явно мы здесь этого делать не будем, но см. ниже уравнение (8.58)], и тогда станет ясно, что уравнение содержит только один параметр. Этот параметр — безразмерное собственное значение, и этим собственным значением является, очевидно, квадрат безразмерной угловой частоты Ω :

$$\Omega^2 = \sigma^2 R^3 / GM. \quad (8.20)$$

Величине Ω^2 можно дать простую физическую интерпретацию: она равна отношению ускорения единичной массы на поверхности звезды, связанного с угловой частотой σ , к ускорению силы тяжести на этом уровне. Первое ускорение равно также центростремительному ускорению очень близкого спутника, движущегося вокруг звезды по круговой орбите радиуса R с угловой частотой σ . Для такой круговой орбиты ускорение должно быть равно ускорению силы тяжести на поверхности, поэтому в данном случае $\Omega^2 = 1$. Ниже мы покажем (разд. 8.9), что для пульсирующей звезды с $\Gamma_1 = 1/2$ всегда должно выполняться условие $\Omega^2 \geq 1$, т.е. период пульсаций всегда меньше периода обращения такого близкого спутника.

Если линейное адиабатическое волновое уравнение в безразмерной форме применить к семейству гомологических звезд (см., например, [146, Ch. 22]) с одинаковыми значениями показателя адиабаты Γ_1 , то легко видеть, что для всех членов семейства применимо одно и то же значение Ω . Поскольку средняя плотность $\bar{\rho} \propto M/R^3$, а $\sigma = 2\pi/P$ (где P — период пульсаций), то соотношение (8.20) представляет собой формулировку *соотношения период — средняя плотность* $\Pi(\bar{\rho})^{1/2} = \text{const}$ для гомологических звезд с одинаковыми значениями Γ_1 . Если выразить данное соотношение через пульсационную постоянную $Q = \Pi(\bar{\rho}/\bar{\rho}_\odot)^{1/2}$ (здесь $\bar{\rho}_\odot$ — средняя плотность Солнца, равная $1,41 \text{ г/см}^3$), то оно примет вид

$$Q_d = 0,1159/\Omega, \quad (8.21)$$

где индекс d означает, что величина Q выражена в сутках. Таким образом, только для гомологических звезд, имеющих одинаковые значения показателя адиабаты Γ_1 , величина Q от звезды к звезде остается строго постоянной (для заданной моды).

Реальные звезды не гомологичны, а показатель адиабаты Γ_1 в общем не одинаков для всех звезд (кроме того, он и внутри звезды не является постоянным). Поэтому для заданной моды величина $\Pi(\bar{\rho})^{1/2}$ не остается строго постоянной от звезды к звезде. Однако оказывается (см. ниже разд. 8.12в), что данная величина обычно является лишь медленно меняющейся функцией параметров звезды. В работах [151, 207, 301], а также [103] приведены удобные аппроксимационные формулы, дающие зависимость Q от этих параметров. Неадиабатичность и нелинейность также оказывают лишь слабое влияние на

значение Q , а значит, и на период пульсаций — обычно не более нескольких процентов (см. ниже гл. 9 и 12). Следовательно, большинство сделанных в настоящей главе замечаний о периодах справедливы в значительно более широких пределах, а не только в случае строго линейных адиабатических колебаний.

8.7. Физическое рассмотрение

Линейное адиабатическое волновое уравнение можно вывести и из чисто физических соображений, если представить себе адиабатическое смещение тонкого слоя вещества из состояния гидростатического равновесия, а затем считать все действующие на смещенный слой возвращающие силы. Тогда мы увидим, что σ^2 пропорционально силовой постоянной (коэффициенту жесткости) простого гармонического осциллятора.

Предположение о постоянстве σ означает, что для всех слоев звезды силовая постоянная одна и та же: все слои имеют одинаковую собственную частоту колебаний. В специальном случае, когда величина ξ (пространственная часть смещения ζ) не зависит от r_0 , неизменность силовой постоянной может быть достигнута только при $m/r_0^3 = \text{const}$, т.е. если равновесная модель является однородной.

Если же отбросить предположение о том, что ξ не зависит от r_0 , то мы будем иметь дело с произвольной равновесной моделью. Предположение о постоянстве величины σ^2 и в этом случае означает, что все слои звезды должны характеризоваться одинаковой силовой постоянной. Но поскольку теперь мы имеем дело с произвольной моделью, для которой отношение m/r_0^3 не является постоянным, то очевидно, что постоянство величины ξ не приведет к $\sigma^2 = \text{const}$. Тогда функция $\xi(r_0)$ уже не будет произвольной: напротив, она должна быть такой, чтобы обеспечить постоянство величины σ^2 для заданной модели. Кроме того, величина $\xi(r_0)$ должна подчиняться граничным условиям в центре и на поверхности звезды. По причинам, указанным в разд. 8.5, только вполне определенные функции $\xi_k(r_0)$ — собственные функции — могут удовлетворять всем этим условиям. Соответствующие *собственные значения* σ_k^2 — это единственно возможные значения величины σ^2 , для которых все слои звезды характеризуются одной и той же силовой постоянной или одной и той же собственной частотой колебаний. Тот факт, что линейное адиабатическое волновое уравнение является дифференциальным уравнением, означает, что возвращающая сила, действующая на заданный слой звезды, а следовательно, и частота его колебаний, зависит не только от величины ξ , но также и от ее производных. Поэтому поведение одного слоя звезды связано с поведением других ее слоев и вся звезда пульсирует как единое целое.

Можно представить себе ситуацию, при которой показатель адиабаты $\Gamma_{1,0}$ был бы меньше $\frac{1}{2}$ в некоторой области (или областях) звезды и больше $\frac{1}{2}$ в остальной части. (Именно такая ситуация должна преобладать в оболочках почти всех звезд, см. [146, Ch. 20].) И тем не менее вещество в той области (областях), где $\Gamma_{1,0} < \frac{1}{2}$, останется динамически устойчивым, если устойчива звезда в целом, т.е. если постоянная σ^2 положительна.

Поскольку величину σ^2 можно интерпретировать по существу как силовую постоянную, ее значение должно возрастать с увеличением порядка моды, потому что более высоким модам соответствуют большие ускорения. Отсюда легко видеть, что величины $|d\xi/dt|$ и $|d^2\xi/dt^2|$ должны возрастать с увеличением порядка моды, что подтверждается детальными расчетами. Более строго аналогичный вывод следует из математической природы линейного адиабатического волнового уравнения, представляющего собой уравнение типа Штурма — Лиувилля (см., например, [282, § 10.3]). (Однако такое заключение не обязательно справедливо для нерадиальных колебаний, см. гл. 17.)

Теперь можно задать вопрос, откуда звезда «знает», что она должна пульсировать с одинаковым для всех своих частей значением σ^2 ? Сразу же можно ответить, что звезда в общем не обязана пульсировать указанным образом, и действительно, вероятно, многие реальные звезды вообще не испытывают таких колебаний (например, различные типы неправильных переменных). Однако в огромном большинстве звезд, включая классические цефеиды, переменные типа RR Лиры и W Девы, по-видимому, все-таки происходят именно такие простые пульсации, как если бы имела только одна мода.

Чтобы попытаться объяснить это явление, предположим, что величина σ^2 не одинакова для всех слоев вещества и, кроме того, что величина $\xi(r_0, t)$ является по существу произвольной функцией переменных r_0 и t (лишь бы она удовлетворяла соответствующим граничным условиям). В таком случае движение будет хаотическим и можно ожидать крутых градиентов температуры и давления. Как мы увидим в разд. 8.8, произвольные движения можно представить суперпозицией «нормальных мод», т.е. собственных функций; хаотические движения обычно соответствуют наличию мод произвольно высокого порядка. При рассмотрении реальных звезд следует отказаться от идеализированного предположения об адиабатических колебаниях — необходимо учитывать эффекты приращения и потерь тепла, а также влияние сил трения, обусловленных вязкостью. В общем можно ожидать, что оба эти эффекта будут относительно большими при наличии крутых градиентов температуры и давления.

Таким образом, можно предполагать, что в реальной звезде, в которой движение первоначально было хаотическим, быстрее всего будут «подавлены» моды самых высоких порядков, сопровождаемые самыми крутыми градиентами температуры и давления. По прошествии достаточно длительного времени останутся, вероятно, только несколько низших мод или же одна из них. Чтобы ответить, какая же мода (или моды) в конце концов останется, нужно детально проанализировать как механизмы затухания, так и все возможные механизмы возбуждения, которые могут действовать в звезде. Если бы звезда была пульсационно устойчива относительно всех мод, то даже указанная оставшаяся мода (или моды) в конце концов была бы подавлена.

Итак, хаотические движения, по-видимому, приводят к диссипации энергии, и поэтому вследствие неадиабатических эффектов и трения они затухают быстрее, чем упорядоченные движения. Следовательно, в общем можно ожидать, что в природе упорядоченное движение преобладает над хаотическим.

Такое предположение может служить ответом на поставленный выше вопрос и может свидетельствовать в пользу существования пульсирующих звезд, в которых, по всей вероятности, происходят довольно простые движения.

8.8. Обсуждение собственных значений: математический подход

Собственные функции и собственные значения линейного адиабатического волнового уравнения обладают рядом важных свойств. Например, собственные функции ξ_k ортогональны между собой при условии, что интегрирование ведется по $dl = r^2 dm$, а все собственные значения σ_k^2 вещественны. Эти свойства обусловлены самосопряженным (эрмитовым) характером линейного адиабатического волнового уравнения.

Для k -й моды это уравнение имеет вид (8.6) с $\xi(r) = \xi_k(r)$ и зависимостью от времени, даваемой соотношением (8.5) ($\sigma = \sigma_k$). Уравнение (8.6) можно записать в виде

$$\mathcal{L}(\xi_k) = \sigma_k^2 \xi_k, \quad (8.22)$$

где линейный оператор \mathcal{L} определяется следующим соотношением:

$$\mathcal{L}(v) = -\frac{1}{\rho r^4} \frac{d}{dr} (\Gamma_1 P r^4 dy/dr) - \frac{1}{\rho r} \left\{ \frac{d}{dr} [(3\Gamma_1 - 4)P] \right\} v. \quad (8.23)$$

Важное свойство оператора \mathcal{L} состоит в том, что он является эрмитовым (или самосопряженным), если на поверхности звезды (при $r = R$, где R — равновесный радиус) выполняется условие $P = 0$. Это означает, что если u и v — «достаточно регулярные» функции, то справедливо равенство

$$\int_M u^* (\mathcal{L} v) r^2 dm = \left[\int_M v^* (\mathcal{L} u) r^2 dm \right]^* = \int_M v (\mathcal{L} u)^* r^2 dm, \quad (8.24)$$

где интегрирование проводится по полной массе звезды M , а звездочка обозначает комплексно сопряженные величины.

Самосопряженность оператора \mathcal{L} можно проверить, подставив выражение (8.23) для \mathcal{L} в первый интеграл соотношения (8.24) и используя при этом соотношение $dm = 4\pi r^2 \rho dr$. Интегрируя затем по частям с учетом равенства нулю давления P на поверхности звезды и замечая, что оператор \mathcal{L} — вещественный, мы видим, что функции u^* и v в первом интеграле в уравнении (8.24) можно менять местами, не изменяя при этом значения интеграла. Тем самым доказывается самосопряженность оператора \mathcal{L} , определенного выражением (8.23).

Из самосопряженности оператора \mathcal{L} следует вещественность всех его собственных значений σ_k^2 , что хорошо известно тем, кто изучал квантовую механику (см. также разд. 15.2). Положительные значения σ_k^2 (величина σ_k вещественна) соответствуют колебаниям с постоянной (во времени) амплитудой, тогда как отрицательные значения σ_k^2 (величина σ_k мнимая) соответству-

ют динамической неустойчивости. (Как показал Кокс [132], такая неустойчивость неизбежно приводит либо к коллапсу, либо к неограниченному расширению.)

Поэтому в рассматриваемом случае не существует таких решений линейного адиабатического волнового уравнения, которые бы соответствовали колебаниям с положительным или отрицательным затуханием (когда σ_k комплексное) (однако если в невозмущенной модели присутствуют движения, то решения уравнения, характеризуемые комплексными значениями σ_k , все-таки существуют, см. гл. 15 и разд. 19.1). Приведенное утверждение еще раз подчеркивает, что теория полностью консервативных адиабатических колебаний обычно не в состоянии дать прямой информации о пульсационной неустойчивости звезды.

Легко также продемонстрировать ортогональность собственных функций, но мы этого здесь делать не будем (см. разд. 15.2). Если ξ_k и ξ_l — некоторые произвольные собственные функции, то условие ортогональности можно выразить следующим образом:

$$\int_M \xi_k^* \xi_l r^2 dm = J_k \delta_{kl}, \quad (8.25)$$

где

$$J_k = \int_M |\xi_k|^2 r^2 dm = \int_I |\xi_k|^2 dI \quad (8.26)$$

есть осцилляторный момент инерции для k -й моды, δ_{kl} — символ Кронекера ($\delta_{kl} = 0$ при $k \neq l$, $\delta_{kk} = 1$), а

$$I = \int_M r^2 dm \quad (8.27)$$

есть момент инерции звезды относительно центра.

Более общие решения линейного адиабатического (или нелинейного и неадиабатического) волнового уравнения всегда можно выразить через собственные функции ξ_k оператора \mathcal{L} , поскольку последовательность этих собственных функций является полной (см., например, [282, Ch. 11]). Таким образом, если $\zeta(r, t)$ — произвольная функция, для которой существует интеграл

$$\int_M |\zeta(r, t)|^2 r^2 dm,$$

то можно записать

$$\zeta(r, t) = \sum_k q_k(t) \xi_k(r), \quad (8.28)$$

где функции $q_k(t)$ зависят только от времени и вследствие ортогональности собственных функций ξ_k определяются для любых k посредством соотношения

$$q_k(t) = (1/J_k) \int_M \xi_k^*(r) \zeta(r, t) r^2 dm. \quad (8.29)$$

8.9. Условия существования осциллирующих решений

В этом разделе будут исследованы некоторые условия существования осциллирующих решений линейного адиабатического волнового уравнения для произвольной сферической модели звезды при основных допущениях, сделанных в данной части. Обсуждение многих вопросов, рассматриваемых в настоящем разделе, можно найти также в статье Леду и Вальравена [345, § 60].

Запишем сначала выражение для собственного значения σ_k^2 в виде интеграла по всей звезде:

$$\sigma_k^2 = (1/J_k) \int_M \xi_k^* (\mathcal{L} \xi_k) r^2 dm. \quad (8.30)$$

Подробно мы рассмотрим лишь случай, когда показатель адиабаты Γ_1 постоянен по всей звезде. Тогда уравнение (8.30) [после подстановки в него выражения (8.23) для оператора \mathcal{R} и небольших преобразований] можно записать в виде суммы двух интегралов, один из которых для звезды в гидростатическом равновесии всегда положителен или равен нулю, а другой положительен при $\Gamma_1 > 1/2$. Таким образом, если $\Gamma_1 > 1/2$, то для всех k $\sigma_k^2 > 0$. Поэтому при $\Gamma_1 > 1/2$ для всех мод существуют осциллирующие решения для любой равновесной модели звезды.

Если $\Gamma_1 = 1/2$, то второй из вышеупомянутых интегралов обращается в нуль, откуда следует, что для любых k $\sigma_k^2 \geq 0$. Однако для основной моды ($k = 0$) можно показать исходя из вариационного свойства линейного адиабатического волнового уравнения (разд. 8.10), что в данном случае справедливо строгое равенство $\sigma_0^2 = 0$ (явно мы этого показывать не будем). Таким образом, при $\Gamma_1 = 1/2$ любая звезда находится в состоянии *безразличного равновесия* относительно колебаний в основной моде ($\sigma_0^2 = 0$). Из вариационного свойства следует также, что в рассматриваемом случае $d\xi_0/dr = 0$, т.е. ξ_0 не зависит от r . Поэтому для основной моды смещение $(\delta r)_0$ уровня, соответствующего заданному значению лагранжевой переменной, пропорционально его расстоянию r от центра, т.е. имеет место гомологическое расширение или сжатие с произвольным характерным временем.

Поскольку линейное адиабатическое волновое уравнение — это уравнение типа Штурма — Лиувилля, собственные значения можно упорядочить так, чтобы $\sigma_k^2 > \sigma_0^2$, где $k > 0$ (см., например, [282, Ch. 10]). Отсюда следует, что для $\Gamma_1 \geq 1/2$ $\sigma_k^2 > 0$ ($k > 0$). Этот результат означает, что безразличное равновесие при $\Gamma_1 = 1/2$ существует только для основной моды; все более высокие моды являются осциллирующими. Однако если модель находится в состоянии безразличного равновесия по отношению к основной моде, то высокие моды обычно не представляют большого интереса.

Если $\Gamma_1 = \text{const}$ и меньше $1/2$, то вновь исходя из вариационного свойства можно показать, что $\sigma_0^2 < 0$ по крайней мере для основной моды. Следовательно, звезда динамически неустойчива по меньшей мере, в основной моде, а, возможно, и в нескольких ближайших модах. Однако поскольку по порядку величины $|d\xi_k/dr|^2 \sim |\xi_k|^2/\lambda_k^2$, где λ_k — «длина волны» k -й моды, и поскольку один из двух вышеупомянутых интегралов содержит $1/\lambda_k^2$, то с уве-

личием k интеграл растет, а поэтому растет и σ_k^2 . С другой стороны, второй из этих интегралов не очень чувствителен к порядку моды. Следовательно, даже при $\Gamma_1 < 1/2$ для достаточно высоких мод должны существовать осциллирующие решения.

К такому же выводу можно прийти и из интуитивных соображений. Заметим, что один из двух интегралов содержит множитель $(3\Gamma_1 - 4)$, который обусловлен, по существу, силами гравитации и сферической симметрией задачи; второй же интеграл связан в основном с сжимаемостью (объемной упругостью) газа (разд. 8.1). Ясно, что динамическая неустойчивость вызывается первым из этих интегралов. Когда величина λ_k^2 становится малой по сравнению с радиусом R , очевидно, что силы упругости оказываются более важными, чем силы гравитации и эффект сферической симметрии. В данном пределе мы имеем дело с плоскими звуковыми волнами, для которых существенны только силы упругости. Как и раньше, осциллирующие решения для высших мод, вероятно, не представляют большого интереса, если звезда динамически неустойчива в основной моде.

Если $\Gamma_1 \neq \text{const}$, то рассмотрение становится более сложным, и в отношении динамической неустойчивости уже нельзя сделать таких четких выводов, как раньше (см., например, [345, § 58]). Тем не менее на данном этапе имеет смысл переписать выражение (8.30) для σ_k^2 через некоторые усредненные величины.

Во-первых, определим следующее среднее:

$$\langle \Gamma_1 r^2 | d\xi_k / dr |^2 \rangle = \int_V \Gamma_1 P r^2 | d\xi_k / dr |^2 dV / \int_V P dV, \quad (8.31)$$

где $dV = 4\pi r^2 dr$ — элемент объема, а интегралы взяты по всему объему V звезды. Определим также среднее значение величины $|\xi_k|^2$:

$$\langle |\xi_k|^2 \rangle = I^{-1} \int_M |\xi_k|^2 r^2 dm = I^{-1} \int_I |\xi_k|^2 dI = J_k / I, \quad (8.32)$$

где J_k — осцилляторный момент инерции, а I — момент инерции звезды относительно центра [см. соотношения (8.26) и (8.27) соответственно].

Среднее значение величины $3\Gamma_1 - 4$ определим посредством соотношения

$$\int_0^R (3\Gamma_1 - 4) P \frac{d}{dr} (4\pi r^3 |\xi_k|^2) dr = (3\Gamma_1 - 4) \int_0^R P \frac{d}{dr} (4\pi r^3 |\xi_k|^2) dr. \quad (8.33)$$

И наконец, определим еще один тип среднего значения величины $|\xi_k|^2$:

$$\int_0^R |\xi_k|^2 d(-\Omega) = \overline{|\xi_k|^2} (-\Omega), \quad (8.34)$$

где Ω — гравитационная потенциальная энергия звезды в равновесном состоянии [см. уравнение (2.11)] [не путать с безразмерной угловой частотой колебаний, определенной выражением (8.20)]. Величина $d(-\Omega)$ — это как раз подынтегральное выражение в уравнении (2.11).

Соберем теперь различные члены, используем теорему вириала в виде

(2.10), проинтегрируем несколько раз по частям и сделаем несколько других преобразований. В результате получим

$$\sigma_k^2 = \{ \langle \Gamma_1 r^2 | d\xi_k / dr |^2 / 3 \rangle / \langle |\xi_k|^2 \rangle + (3\overline{\Gamma_1} - 4) \overline{(|\xi_k|^2)} / \langle |\xi_k|^2 \rangle \} (-\Omega/I) =$$

$$= \alpha(-\Omega/I), \quad (8.35)$$

что служит также определением безразмерной величины α .

Отметим, что, за исключением довольно высоких мод, α обычно порядка единицы, так как два типа средних значений $|\xi_k|^2$ в соотношении (8.35), вероятно, несильно отличаются друг от друга. Кроме того, поскольку $|d\xi_k/dr|^2 \sim |\xi_k|^2/\lambda_k^2$, где λ_k — «длина волны» k -й моды, первое слагаемое в фигурных скобках в (8.35) должно быть порядка R^2/λ_k^2 (R — радиус звезды), т.е. приблизительно равно квадрату числа «длин волны», укладывающихся на диаметре звезды. Следовательно, можно ожидать, что для довольно высоких мод $\sigma_k^2 \sim (R^2/\lambda_k^2)\sigma_0^2$. Отметим также, что второй множитель $(-\Omega/I)$ определяется равновесной моделью звезды и не зависит от ее пульсационных свойств.

Тот факт, что, согласно соотношению (8.36), $\sigma_k^2 \sim (-\Omega/I)$ (по крайней мере для низших мод) иллюстрирует общее сходство (радиальных) звездных пульсаций с обычными колебательными системами.

Наконец, можно привести еще две формы соотношения (8.35), которые наглядны и полезны. Во-первых, отметим, что в выражении для гравитационной потенциальной энергии Ω текущее значение массы m можно записать через $\bar{\rho}(r)$ — среднюю плотность вещества внутри сферы радиуса r :

$$\bar{\rho}(r) = m/(4/3\pi r^3). \quad (8.37)$$

Тогда получаем

$$\sigma_k^2 = \alpha \cdot 4\pi G \bar{\rho} \langle \bar{\rho}(r)/\bar{\rho} \rangle / 3, \quad (8.38)$$

где $\bar{\rho}$ — средняя плотность всей звезды, а угловые скобки обозначают соответствующее [аналогичное (8.32)] среднее от указанной величины, взятое по всей звезде.

Соотношение (8.38) показывает, что $\sigma_k^2 \sim G\bar{\rho}$ по крайней мере для достаточно малых k , а это как раз и есть упоминавшееся выше соотношение период — средняя плотность (см. гл. 2 и разд. 8.6). Кроме того, согласно (8.38), σ_k^2 возрастает с увеличением степени концентрации массы к центру, т.е. с ростом $\langle \bar{\rho}(r)/\bar{\rho} \rangle$. С физической точки зрения, звезда с большой концентрацией массы «крепче связана», чем звезда с малой концентрацией, и интуитивно можно ожидать более высокой частоты пульсаций в первом случае, чем во втором. Однако зависимость σ_k^2 от степени концентрации массы не монотонна (см. разд. 8.12в); в формуле (8.38) это учитывается посредством множителя α .

Во-вторых, снова используем теорему вириала в виде (2.10) и выразим величину $-\Omega$ через массу звезды M и через определенные подходящим образом средние значения по всей звезде показателя адиабаты Γ_1 и адиабатической

скорости звука v_s . Запишем также $I = M \langle R^2 \rangle$, где $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ — величина порядка R — есть своего рода гирорадиус звезды. В результате получим

$$\sigma_k^2 = \alpha \cdot 3 \langle 1/\Gamma_1 \rangle \langle v_s^2 \rangle / \langle R^2 \rangle. \quad (8.39)$$

Это соотношение показывает, что по крайней мере для низших мод (малые k) $\sigma_k^2 \sim \langle v_s^2 \rangle / \langle R^2 \rangle$, т.е. соответствующий период пульсаций $\Pi_k \sim \sim (\langle R^2 \rangle / \langle v_s^2 \rangle)^{1/2}$. Таким образом, как и утверждалось в гл. 2, период пульсаций звезды в одной из низших мод по порядку величины действительно равен времени распространения звуковой волны вдоль звездного диаметра.

Заканчивая раздел, заметим, что уравнение (8.35) можно использовать для определения нижнего предела σ_k^2 для звезды с заданными средней плотностью $\bar{\rho}$ и постоянным значением Γ_1 . Если предположить, что средняя плотность $\bar{\rho}(r)$ внутри сферы радиуса r не возрастает наружу, то получим

$$\sigma_k^2 \geq (3\Gamma_1 - 4) 4\pi G \bar{\rho} / 3 \quad \text{для любых } k, \quad (8.40)$$

где нижний предел равен σ^2 для основной моды однородной модели с такими же Γ_1 и $\bar{\rho}$, как и у рассматриваемой звезды.

8.10. Вариационное свойство собственных значений

Выведенные в разд. 8.9 выражения для σ_k^2 , казалось бы, представляют чисто академический интерес, если не считать их роли для облегчения понимания физической картины пульсаций. Действительно, чтобы оценить интегралы в этих выражениях, необходимо знать собственные функции $\xi_k(r)$, для нахождения которых обычно должны быть заранее известны собственные значения σ_k^2 , или же их можно получить одновременно с нахождением собственных значений. Поэтому возникает вопрос о практической пользе приведенных выражений.

В этом разделе мы покажем, что собственные значения подчиняются вариационному принципу, поэтому эти выражения (точнее, выражения, очень похожие на приведенные в разд. 8.9) очень удобны для оценок σ_k^2 , когда не известны собственные функции ξ_k , т.е. не решена полная задача о собственных значениях. Как хорошо известно, вариационный принцип вытекает в конечном счете из самосопряженности оператора \mathcal{L} (см. разд. 8.8). Наше доказательство вариационного принципа в некоторой степени следует доказательству, приведенному в [356].

Пусть $u(r)$ — любая достаточно регулярная функция равновесного текущего радиуса r . Введем вещественное число Σ^2 :

$$\Sigma^2 = J^{-1} \int_M u^* \mathcal{L}(u) r^2 dm, \quad (8.41)$$

где J определяется в соответствии с выражением (8.26) с заменой в нем ξ_k на u . Линейный оператор \mathcal{L} определяется соотношением (8.23), а интегрирование проводится по полной массе звезды M .

Представим теперь, что величина $u(r)$ для любого r испытывает произвольное, но малое изменение $\Delta u(r)$. Можно ожидать, что при такой вариации

величины $u(r)$ число Σ , определенное формулой (8.41), изменится на $\Delta\Sigma$. Изменение $\Delta\Sigma$ можно вычислить, если проварьировать уравнение (8.41), считая оператор Δ обычным дифференциальным оператором. Отметим, что оператор Δ можно внести под знак интеграла, поскольку эта вариация не относится к величине r или к соответствующему значению текущей массы m , т.е. при варьировании r остается фиксированным.

Умножая (8.41) на J и беря вариацию, получаем выражение, связывающее величины $\Delta\Sigma$, u , u^* , Δu , Δu^* , $\mathcal{L}(u)$ и $\Delta\mathcal{L}(u)$. Поскольку оператор \mathcal{L} линейный, $\Delta\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(\Delta u)$. Кроме того, оператор \mathcal{L} самосопряженный, и поэтому в указанном выражении можно менять местами величины Δu и u^* . Наконец, учтем, что оператор \mathcal{L} и величина Σ^2 вещественны. В результате имеем

$$2J\Delta\Sigma + 2\operatorname{Re} \left\{ \int_M (\Delta u^*) [\Sigma^2 u - \mathcal{L}(u)] r^2 dm \right\} = 0, \quad (8.42)$$

где $\operatorname{Re} \{ \dots \}$ — вещественная часть указанной величины.

Итак, если $u(r)$ является решением уравнения

$$\Sigma^2 u - \mathcal{L}(u) = 0, \quad (8.43)$$

то $\Delta\Sigma = 0$ даже при $\Delta u^* \neq 0$. И обратно, если $\Delta\Sigma = 0$, а $\Delta u^*(r)$ — произвольная (но малая) функция r , то $u(r)$ должно быть решением уравнения (8.43). Но уравнение (8.43) — это как раз линейное адиабатическое волновое уравнение, откуда $u(r) = \xi_k(r)$ и $\Sigma^2 = \sigma_k^2$, т.е. имеем соответственно собственную функцию и собственное значение линейного адиабатического волнового уравнения для k -й моды. Итак, мы доказали следующее: те решения уравнения (8.43), для которых величина Σ имеет экстремум ($\Delta\Sigma = 0$) относительно произвольно малых изменений функции $u(r)$, являются *собственными функциями* $\xi_k(r)$, а связанные с такими решениями собственные значения — соответствующими *адиабатическими собственными значениями* σ_k^2 для k -й моды.

Практическая польза применения вариационного принципа обусловлена тем, что при непрерывном изменении функции $u(r)$ величина Σ^2 проходит через истинный экстремум и это экстремальное значение $\Sigma^2 = \sigma_k^2$ достигается тогда, когда $u(r) = \xi_k(r)$. Следовательно, для заданной пробной функции $u(r) = \xi_k(r)$ ошибка в величине Σ^2 много меньше, чем ошибка в $u(r)$. Поэтому даже очень грубая пробная функция $u(r)$ часто обеспечивает весьма точное приближение к значению σ_k^2 (см. разд. 8.15). Иначе говоря, если функция $u(r)$ всюду отличается от $\xi_k(r)$ на малую величину порядка ε , то Σ^2 отличается от σ_k^2 на малую величину порядка ε^2 .

Некоторые приложения вариационного принципа представлены в [235, Ch. 15]; см. также [345, § 58].

Вариационный принцип особенно полезен для основной моды ($k = 0$) радиальных колебаний, поскольку в этом случае величина Σ^2 подчиняется принципу минимума (частный случай экстремума). Это заключение вытекает из самой природы линейного адиабатического волнового уравнения, являющегося уравнением типа Штурма — Лиувилля, и, в частности, из того факта, что собственные значения в этом случае можно упорядочить (см., например, [282, Ch. 10]).

Итак, сформулируем принцип минимума в приложении к основной моде радиальных колебаний: функция $u(r)$, которая приводит к самому глубокому возможному минимуму величины Σ^2 , — это основная собственная функция, а соответствующий минимум Σ^2 — это основное собственное значение σ_0^2 .

Принцип минимума можно использовать для доказательства некоторых утверждений, высказанных в разд. 8.9 (однако здесь мы не будем приводить эти доказательства в явном виде). Во-первых, можно доказать, что независимо от модели звезды $\sigma_0^2 = 0$ и $\xi_0(r) = \text{const}$ при $\Gamma_1 = 1/2$, а при $\Gamma_1 < 1/2$ $\sigma_0^2 < 0$. (Однако, согласно общей теории относительности, динамическая неустойчивость возникает при значении Γ_1 , несколько большем $1/2$, как впервые показал Чандрасекар [74 — 76]*; см. также разд. 19.5.) Во-вторых, из указанного принципа можно получить уравнение (8.3) для угловой частоты основной моды однородной модели, имеющей постоянную плотность $\rho(r) = \bar{\rho}$ по всему объему ($\bar{\rho}$ — средняя плотность) и постоянное значение Γ_1 ; кроме того, можно показать, что для этой модели $\xi_0(r) = \text{const}$.

Наконец, как отмечали Леду и Вальравен [345, § 60], принцип минимума позволяет установить верхний предел на значение σ_0^2 . Рассмотрим случай $\Gamma_1 \neq \text{const}$. Величину Σ^2 можно записать здесь в форме уравнения (8.36). Взяв простую пробную функцию $u(r) = \text{const}$ и использовав принцип минимума, получим

$$\sigma_0^2 \leq (\overline{3\Gamma_1 - 4})_u = \text{const} (-\Omega/I) = \Sigma_u^2 = \text{const}^* \quad (8.44)$$

где для величины $(\overline{3\Gamma_1 - 4})_u = \text{const}$ из (8.33) легко получить простое выражение (в явном виде мы этого делать не будем).

Итак, если $\Gamma_1 = \text{const}$, то величина σ_0^2 должна быть заключена в интервале

$$(3\Gamma_1 - 4) 4\pi G \bar{\rho} / 3 \leq \sigma_0^2 \leq \Sigma_u^2 = \text{const}^* \quad (8.45)$$

где нижний предел относится к однородной модели (см. (8.40)), а верхний определяется соотношением (8.44) при $\Gamma_1 = \text{const}$.

8.11. Физическая интерпретация некоторых выражений

В настоящем разделе мы рассмотрим в основном физический смысл интегральных выражений на примере уравнения (8.30) для квадрата собственной частоты σ_k^2 k -й моды линейных адиабатических радиальных пульсаций. Как показали Леду и Вальравен [345, § 59], вариационное свойство собственных значений линейного адиабатического волнового уравнения (см. разд. 8.10) соответствует тому, что звезда как механическая система должна подчиняться принципу Гамильтона в классической механике.

Поскольку в обсуждаемые выражения входят квадраты малых величин, нужно быть очень внимательным при использовании комплексных обозначений. Например, $\text{Re}(\dot{\zeta}^2) \neq [\text{Re}(\dot{\zeta})]^2$.

*С. А. Каплан (Ученые записки Львовского университета им. И. Франко, 15, вып. 4, 109, 1949) показал, что этот эффект приводит к уменьшению предельной массы белого карлика. — Прим. ред.

Относительное смещение $\zeta = \delta r/r$ можно записать в следующем виде:

$$\zeta(r, t) = \xi(r)e^{i\sigma t} = |\xi(r)|e^{i\phi(r)}e^{i\sigma t}, \quad (8.46)$$

где $|\xi|$ — модуль смещения ζ , а ϕ — фаза смещения, которая в общем случае является функцией r , но в случае чисто стоячих волн от r не зависит. Поэтому записывая, например, ζ^2 , мы подразумеваем $[\text{Re}(\zeta)]^2$.

Вычислим теперь полную кинетическую энергию \mathcal{F} радиально пульсирующей звезды, все еще рассматривая чисто осциллирующие решения (σ вещественно):

$$\mathcal{F} = \int_M \frac{1}{2} \left\{ \partial [\text{Re}(\zeta)] / \partial t \right\}^2 r^2 dm, \quad (8.47)$$

где интегрирование проводится по всей массе звезды. Можно показать, что \mathcal{F} как функция времени может обратиться в нуль только в случае стоячих волн, причем дважды в течение каждого периода пульсаций. Однако в общем случае минимальное значение \mathcal{F} положительно, т.е. полная кинетическая энергия в течение периода никогда не обращается в нуль; этого и следует ожидать, если движение не имеет характера стоячей волны. В любом случае среднее значение \mathcal{F} полной кинетической энергии за период $\Pi = 2\pi/\sigma$ равно

$$\bar{\mathcal{F}} = \frac{1}{4}\sigma^2 \int_M |\xi|^2 r^2 dm. \quad (8.48)$$

Учитывая (8.26), получаем

$$\sigma^2 J = 4\bar{\mathcal{F}}. \quad (8.49)$$

Следовательно, левая часть уравнения (8.30) (после умножения на J_k) равна $4\bar{\mathcal{F}}_k$, т.е. она в 4 раза больше полной средней кинетической энергии k -й моды. (Нижне мы будем опускать индекс k , поскольку все последующие рассуждения справедливы для любых k .)

Рассмотрим теперь правую часть уравнения (8.30) (после умножения на J_k). Чтобы дать ей физическую интерпретацию, вычислим полную работу, совершенную силой, обусловленной наличием градиента давления, и силой тяготения, которые действуют на звезду при небольшом отклонении ее от состояния гидростатического равновесия*.

Предположим, что заданный слой звезды, равновесный радиус которого равен r_0 , уже смещен от равновесного положения на расстояние $\delta r' = \eta$. С точностью до величин 1-го порядка малости можно рассчитать полную силу, действующую на слой в результате такого смещения и отнесенную, скажем, к единице массы. Тогда работа (на единицу массы), совершаемая над слоем при его дальнейшем смещении на расстояние $d\eta$, будет равна произведению указанной силы на $d\eta$. После небольших преобразований с использованием линеаризованного уравнения неразрывности мы получим выражение, в которое входит, в частности, $d(\delta P/P_0)$. Исключим эту величину с помощью уравнения

* Сюда не включается работа, совершаемая в результате расширения или сжатия массовых слоев; т.е. рассматривается только та работа, которая может проявляться как кинетическая энергия (см. разд. 4.2).

энергии (7.8), в котором используем равенство (7.10) (таким образом, будем считать процессы термодинамически обратимыми). Наконец, проинтегрируем полученное выражение по полиному смещению $\delta r(r_0, t) = \xi r_0$ и по всей массе звезды M . Полная работа, совершенная над звездой силами, сопровождающими такое смещение, определится тогда суммой нескольких интегралов по всей звезде, включающих величины ξ , $\delta\rho/\rho_0$, вариацию энтропии и субстанциональную производную этой вариации.

Отметим, что лишь та часть работы, в которую входят ξ и $\delta\rho/\rho_0$, действительно является консервативной, т.е. зависит от конечного смещения и не зависит от его траектории или от способа, каким это конечное смещение было достигнуто. Следовательно, указанная часть работы обладает свойствами, присущими потенциальной энергии. Значения оставшихся членов зависят от того, какой теплообмен с окружающей средой происходил во время смещения и, следовательно, от пути, выбранного для достижения конечного смещения. Поэтому данные члены не являются консервативными в вышеупомянутом смысле. Они представляют собой работу, совершенную над звездой неадиабатическими неконсервативными силами, действующими во время смещения.

Согласно изложению, запишем полную работу W в виде

$$W = -\delta\Phi + \text{неадиабатические члены}, \quad (8.50)$$

где с точностью до малых величин второго порядка

$$\delta\Phi = \int_M [\Gamma_1 P_0 (\delta\rho/\rho_0)^2 / 2\rho_0 - 2GM\xi^2 / r_0] dm. \quad (8.51)$$

Величина $\delta\Phi$ — это эффективная потенциальная энергия звезды в возмущенном состоянии, причем $\delta\Phi = 0$ соответствует состоянию гидростатического равновесия. Знак минус в уравнении (8.50) использован потому, что потенциальная энергия системы всегда (если не считать произвольно устанавливаемого нулевого пункта) принимается равной работе против действующих на систему сил.

Чтобы было легче понять, какой знак будет иметь величина $\delta\Phi$, определение соотношением (8.51), можно выразить $\delta\Phi$ только через $\xi = \delta r/r_0$ и $\partial\xi/\partial r_0$. Используем линеаризованное уравнение неразрывности, раскроем квадратные скобки и проинтегрируем по частям с учетом того, что $P = 0$ на поверхности звезды. После небольших преобразований в результате получим (опуская индекс 0)

$$\delta\Phi = \frac{1}{2} \int_0^R \{4\pi\Gamma_1 P r^4 (\partial\xi/\partial r)^2 - 4\pi r^3 \xi^2 d[(3\Gamma_1 - 4)P]/dr\} dr. \quad (8.52)$$

Напомним, что величина $\xi(r, t)$ здесь по существу произвольная, но вещественная функция расстояния r и времени t .

Отметим, во-первых, что если $\Gamma_1 = \text{const} > 4/3$, то $\delta\Phi > 0$ для любого смещения $\xi \neq 0$ (при условии, что в невозмущенном состоянии звезда находится в гидростатическом равновесии). Кроме того, при этом же условии отсутствие членов первого порядка в выражении для $\delta\Phi$ означает, что в первом

приближении производная $\delta\Phi$ по «смещению» при $\zeta = 0$ равна нулю. Следовательно, величина $\delta\Phi$ имеет истинный минимум относительно любого возможного смещения из состояния гидростатического равновесия (и это минимальное значение равно нулю).

Во-вторых, при $\Gamma_1 = \text{const} \leq 1/2$ $\delta\Phi \leq 0$, если смещение $\zeta(r, t)$ является постоянным вдоль радиуса и производная $\delta\Phi$ по «смещению» снова равна нулю при $\zeta = 0$. Таким образом, если вдоль радиуса $\zeta(r, t) = \text{const}$ или изменяется достаточно медленно, то возможным состоянием является либо безразличное равновесие с произвольным характерным временем, либо динамическая неустойчивость. Однако если градиенты смещения $\zeta(r, t)$ достаточно круты, то величина $\delta\Phi$ может быть положительной даже при $\Gamma_1 \leq 1/2$. Этот вывод не противоречит нашим предыдущим результатам, поскольку в рассматриваемом случае величина $\zeta(r, t)$ не обязательно является собственной функцией линейного адиабатического волнового уравнения. Действительно, сделанный вывод представляется возможным, так как известно, например, что достаточно высокие моды линейного адиабатического волнового уравнения динамически устойчивы даже при $\Gamma_1 < 1/2$.

Чтобы завершить обсуждение уравнения (8.30), возьмем от величины $\delta\Phi$, представленной уравнением (8.52), среднее по времени за полный период $\Pi = 2\pi/\sigma$, считая движение строго периодическим с угловой частотой σ . Помимо о предостережениях, касающихся обозначений комплексных величин, получаем

$$\overline{\delta\Phi} = \frac{1}{4} \int_M \xi^* \mathcal{L}(\xi) r^2 dm, \quad (8.53)$$

где \mathcal{L} — линейный оператор, определенный соотношением (8.23).

Таким образом, мы имеем следующую физическую интерпретацию уравнения (8.30):

$$4 \overline{\mathcal{T}} = 4 \overline{\delta\Phi}, \quad (8.54)$$

т.е. в колебательном движении средняя кинетическая энергия равна средней потенциальной энергии. Отметим, что хотя уравнение (8.30) применяется специально для собственных значений σ_k^2 и собственных функций $\xi_k(r)$ линейного адиабатического волнового уравнения, наша интерпретация этого уравнения, представленная соотношением (8.54), не требует, чтобы величины σ^2 и $\xi(r)$ были соответственно собственным значением и собственной функцией такого уравнения.

Результат (8.54) является довольно общим, и его иногда называют *принципом Рэлея*. Он устанавливает, что в любой колебательной системе частота колебаний подстраивается таким образом, чтобы средние кинетическая и потенциальная энергии были равны. Для возмущения произвольной формы $\xi(r)$ это уравнение дает простой и эффективный метод оценки частоты колебаний осциллирующей системы (см., например, [570]).

Полная пульсационная энергия звезды равна

$$\Psi = \mathcal{T} + \delta\Phi, \quad (8.55)$$

причем $\bar{\Psi} = 0$ в статическом состоянии звезды. Среднее от Ψ за период будет равно

$$\bar{\Psi} = 2 \bar{\mathcal{F}} = 2 \bar{\delta\Phi}. \quad (8.56)$$

Для стоячих волн полная пульсационная энергия Ψ строго постоянна, и она поочередно превращается из чисто кинетической в чисто потенциальную, как для простого одномерного маятника. Если пульсации имеют компонент типа бегущей волны (в выражении (8.46) фаза $\phi(r) \neq \text{const}$), то величина Ψ уже не строго постоянна, но осциллирует с малой амплитудой и с угловой частотой 2σ относительно своего среднего значения $\bar{\Psi}$ [напомним, что величина Ψ зависит от квадратов тригонометрических функций; см., например, уравнение (8.52)].

Справедливость этих утверждений становится очевидной, если учесть, что величина $\delta\Phi$, определяемая с точностью до членов второго порядка соотношением (8.52), может быть выражена в общем виде, т.е. нелинейно, вследствие ее связи с суммой гравитационной E_g и потенциальной U энергий звезды (в разд. 4.6 гравитационная энергия была обозначена Φ). Для сферически симметричного распределения вещества это общее выражение имеет вид

$$\delta\Phi = \delta_{ad}(E_g + U) = \delta_{ad} \int_M (-Gm/r + E) dm, \quad (8.57)$$

где E — внутренняя энергия на единицу массы, а δ_{ad} означает, что берется адиабатическая вариация. Можно показать в явном виде, что величина $\delta\Phi$, определенная этим выражением и взятая с обратным знаком, равна работе, совершаемой в процессе пульсаций силой, обусловленной наличием градиента давления, и силой тяготения, действующими на звезду при адиабатическом смещении всех ее слоев.

На основе вышеприведенных замечаний становится ясно, что полная пульсационная энергия Ψ , представленная с точностью до членов второго порядка соотношением (8.55), — это частный случай более общей полной энергии Ψ , определенной в разд. 4.6. Следовательно, рассмотренная в разд. 4.6 теорема общей энергии применима и к величине Ψ в уравнении (8.55).

Выражение (8.52) для $\delta\Phi$ можно получить и непосредственно из уравнения (8.57), если взять указанную в нем вариацию. Эту вариацию следует брать, однако, с точностью до малых величин второго порядка, поскольку вариация с точностью до членов первого порядка тождественно обращается в нуль, если невозмущенная система находится в гидростатическом равновесии.

В работе [559] получено разложение величины $\delta\Phi$ с точностью до членов третьего порядка. Вариация до третьего порядка может дать информацию о направлении нарастания возмущения (т.е. о расширении или сжатии) в случае динамически неустойчивой системы. Такая вариация показывает, например, что при $\Gamma_1 = \text{const} < 4/3$ и при гомологическом движении (когда величина $\xi = \text{const}$ в пространстве) неустойчивость развивается в том же направлении, в котором действовало первоначальное возмущение, что представляется вполне естественным.

8.12. Решение линейного адиабатического волнового уравнения

В настоящем разделе мы рассмотрим практические методы численного решения линейного адиабатического волнового уравнения для произвольных равновесных моделей звезд, а также суммируем результаты фактического решения этого уравнения для нескольких конкретных моделей. Будут рассмотрены два общих метода решения данного уравнения. Один из них, обсуждаемый в п. 8.12а, основан на методах шивки. Еще несколько лет назад использовался практически только этот метод и его продолжают применять многие исследователи по сей день. Второй метод, рассматриваемый в п. 8.12б, основан на матричной алгебре и на свойствах последовательностей Штурма. Наконец, в п. 8.12в будут рассмотрены результаты для избранных звездных моделей.

8.12а. МЕТОДЫ СШИВКИ

Запишем пространственную часть (8.6) линейного адиабатического волнового уравнения в безразмерном виде

$$\xi'' = (R/x\lambda_p)\{(x - 4\lambda_p/R)\xi' - [\Omega^2 x^3/\Gamma_1 q - (3\Gamma_1 - 4)/\Gamma_1]\xi\} + \\ + (R/x\lambda_p)(x\xi' + 3\xi)d \ln \Gamma_1/d \ln P. \quad (8.58)$$

Здесь ξ — пространственная часть смещения $\zeta = \delta r/r_0$, Ω — безразмерная угловая частота, определенная выражением (8.20), а $q = m/M$, где M — полная масса звезды и m — масса внутри сферы радиуса r . В (8.58) опущен индекс 0 при равновесных величинах, а штрихи означают дифференцирование по переменной $x \equiv r_0/r$. Наконец, λ_p — локальная высота однородной атмосферы. Интересно отметить соотношение $(R/x\lambda_p) = V/x^2$, где $V = -d \ln P/d \ln x$ — инвариантная переменная в теории внутреннего строения звезд (см., например, [500]).

Рассмотрим сначала интегрирование уравнения (8.58) от поверхности ($x = 1$) к центру. Нормируем величину ξ на поверхности: $\xi_{\text{surf}} = 1$. Кроме того, предположим в данном пункте, что показатель адиабаты Γ_1 одинаков по всей звезде, и поэтому в уравнении (8.58) можно пренебречь последним членом. Эффекты переменного Γ_1 будут рассмотрены в разд. 8.14.

Известно, что в поверхностных слоях звезды (где $x \approx 1$) отношение λ_p/R обычно мало, поэтому для нашего обсуждения можно пренебречь этой величиной в первом члене в фигурных скобках в уравнении (8.58). Рассмотренное в разд. 8.3 граничное условие типа стоячей волны требует, чтобы все выражение в фигурных скобках в уравнении (8.58) было очень малым в поверхностных областях. Следовательно, при $x = 1$ имеем

$$\xi'_{\text{surf}} = [\Omega^2 - (3\Gamma_1 - 4)]/\Gamma_1. \quad (8.59)$$

Напомним, что значение Ω^2 заранее не известно, и поэтому при интегрировании от поверхности вглубь Ω^2 следует рассматривать как пробный параметр. Если на поверхности звезды важную роль играет давление излучения, то уравнение (8.59) нужно заменить соотношением типа (8.15)

В случае однородной модели с постоянным Γ_1 мы имеем для основной моды $\Omega^2 = 3\Gamma_1 - 4$. Кроме того, как было указано в разд. 8.9, такая модель имеет наименьшее возможное значение Ω^2 для этой моды из всех звездных моделей с теми же значениями показателя адиабаты Γ_1 и средней плотности $\bar{\rho}$. Отсюда следует, что для моделей рассматриваемого вида ($\Gamma_1 = \text{const}$) и для принятого граничного условия на поверхности (8.59) $\xi'_{\text{surf}} \geq 0$ (если $\Gamma_1 \geq 4/3$).

Из приведенных результатов можно сделать вывод, что для моделей с $\Gamma_1 = \text{const} \geq 4/3$ в поверхностных областях ξ либо убывает по направлению к центру, либо в случае однородной модели или при $\Gamma_1 = 4/3$ остается постоянным. Производная ξ' также убывает к центру (если $\Gamma_1 > 4/3$) и даже быстрее, чем ξ , так как в поверхностных областях отношение x^3/q убывает с глубиной. [Отметим, что поскольку для реалистичных моделей Ω^2 обычно в несколько раз больше единицы (см. п. 8.12в), для $x \approx 1$ приближению $\xi' \propto \Omega^2$.]

Таким образом, при интегрировании вглубь с заданным пробным значением Ω^2 ξ обычно монотонно убывает, по крайней мере сначала. Численные расчеты показывают, что если для заданной модели пробное значение Ω^2 слишком мало, то ξ в конце концов (при дальнейшем продвижении вглубь) станет положительно расходящимся, т.е. большим и положительным. Если пробное значение слишком велико, то ξ станет в итоге отрицательно расходящимся, т.е. большим и отрицательным. При правильном же выборе Ω^2 ξ более или менее монотонно убывает на всем протяжении от поверхности до центра звезды.

Рассмотрим теперь решение, получаемое при интегрировании от центра ($x = 0$) наружу и удовлетворяющее граничному условию в центре. Отметим, что $x^3/q \rightarrow \bar{\rho}/\rho_c$ при $x \rightarrow 0$, где ρ_c — центральная плотность модели. Кроме того, при $x \rightarrow 0$ $R/\lambda_p \rightarrow 0$. Из уравнения (8.58) видно поэтому, что решение, которое подчиняется граничному условию в центре [см. (8.8)], не будет иметь особенностей в центральных областях.

Отметим, что $\bar{\rho}/\rho_c \ll 1$ для большинства реалистичных звездных моделей и особенно для моделей с высокой концентрацией массы к центру. Поэтому в центральных областях таких моделей член с Ω^2 в уравнении (8.58) обычно мал или даже пренебрежимо мал. (Однако для однородной модели или моделей с малой концентрацией массы к центру или же для очень высоких мод в различных моделях подобное утверждение неверно.) А тогда линейное адиабатическое волновое уравнение в центральных областях практически не зависит от Ω^2 . Физически это просто отражает тот факт, что в глубоких звездных недрах локальное ускорение силы тяжести может быть большим по сравнению с ускорением, обусловленным пульсациями: в таких случаях центральные области перемещаются вглубь и наружу настолько медленно, что в любой момент времени они находятся, по-видимому, почти в гидростатическом равновесии.

Итак, мы видим, что при интегрировании от поверхности к центру остается неопределенным значение Ω^2 , а при интегрировании от центра наружу остается неопределенным ξ_c (значение ξ в центре). Правильное решение можно получить при согласовании между собой в некоторой промежуточной точ-

ке результатов интегрирования из центра наружу и от поверхности к центру, т.е. потребовав, чтобы значения ξ и производной $d \ln \xi / dx$ в точке сшивки были одинаки и теми же для обоих решений. Таким путем могут быть найдены как собственное значение Ω^2 , так и собственная функция $\xi(x)$ для заданной моды в рассматриваемой модели.

Для достаточно простых звездных моделей можно найти аналитические решения линейного адиабатического волнового уравнения. Несколько таких решений получены и обсуждены в монографии Росселанда [465, гл. 3] (однако см. [608]).

8.126. МАТРИЧНЫЕ МЕТОДЫ

Мы опишем здесь основанный на матричной алгебре метод численного решения линейного адиабатического волнового уравнения для произвольной равновесной звездной модели. Аналогичные методы были использованы в [68, 154]. Эти методы очень удобны при расчетах с помощью ЭВМ. Часть излагаемого здесь материала основана на неопубликованных заметках Кастора и используется с его любезного согласия.

Прежде всего необходимо записать линеаризованное уравнение движения (8.6) в конечно-разностном виде, и это можно сделать различными способами. Примем, что зависимость от времени имеет вид (8.5) (в этом пункте заменим σ на ω). Будем использовать здесь конечно-разностные выражения, которые в основном согласуются с широко распространенной схемой нелинейных численных расчетов (см., например, [117]). Некоторые незначительные отличия этих выражений от общепринятых несущественны для настоящего рассмотрения, цель которого — проиллюстрировать используемые принципы.

В предлагаемой схеме модель мысленно разбивают на J дискретных сферических концентрических зон, причем масса каждой зоны не меняется со временем. Такое разбиение на зоны может охватывать всю звезду или только внешнюю оболочку, окружающую жесткое сферическое ядро. Зоны нумеруются по направлению к поверхности: $1, 2, \dots, J$, а границы раздела, число которых равно $J + 1$, нумеруются $0, 1, 2, \dots, J$. Масса i -й зоны равна $M_{i-1/2}$, причем i -я зона ограничена поверхностями раздела с радиусами r_{i-1} и r_i ($i = 1, \dots, J$). Переменные, характеризующие состояние вещества, такие, как масса $M_{i-1/2}$, давление $P_{i-1/2}$, удельный объем $V_{i-1/2}$, температура $T_{i-1/2}$ и т.д., рассматриваются в «средних» соответствующих зон и считаются постоянными внутри зон. Прочие переменные, например радиус r_i , текущее значение светимости L_i , считаются вычисленными на границах раздела зон (рис. 8.1). Таким образом, в данной схеме конечно-разностное представление уравнения (8.6) имеет следующий вид:

$$\omega^2 \delta r_i = -4Gm_i \bar{\rho} r_i / r_i^3 + 4\pi r_i^2 [(\delta P)_{i+1/2} - (\delta P)_{i-1/2}] / \mathcal{M}_i \quad (8.60)$$

где $m_i = M_{r,i}$ — масса, заключенная внутри i -й поверхности раздела, а

$$\mathcal{M}_i = \frac{1}{2} (M_{i-1/2} + M_{i+1/2}) \quad (8.61)$$

есть «эффективная» масса, которая определяет инерционные свойства i -й поверхности раздела.

При адиабатических колебаниях существует простая связь величин δP и δV [см., например, уравнение (5.36a)]. Запишем эту связь в конечно-разностном виде и определим новые зависимые переменные X_i :

$$X_i = (\mathcal{B} M_i)^{1/2} \delta r_i \quad (i = 0, 1, \dots, J). \quad (8.62)$$

Причина введения новых переменных скоро станет понятной. Тогда уравнение (8.60) можно записать следующим образом:

$$-A_{i+1} X_{i+1} + (B_i - \omega^2) X_i - C_{i-1} X_{i-1} = 0, \quad (8.63)$$

где коэффициенты определены только для $i = 1, 2, \dots, J-1$ и однозначно задаются равновесной моделью звезды. Они представляют собой довольно сложные выражения, точный вид которых несуществен для нашего рассмотрения.

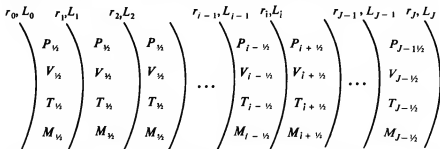


рис. 8.1. Схема разбиения на зоны, принятая в матричном методе решения линейного адиабатического волнового уравнения.

Уравнение (8.63) не применимо для $i = 0$, поскольку переменной X_{-1} (т.е. δr_{-1}) не существует. Поэтому используем центральное граничное условие

$$X_0 = 0 \quad (\text{т.е. } \delta r_0 = 0). \quad (8.64)$$

Уравнение (8.63) не применимо также и для $i = J$, поскольку коэффициенты A_{J+1} и B_J включают величины $P_{J+1/2}$, $M_{J+1/2}$ и т.д., которые также не определены, и поскольку величина X_{J+1} (т.е. δr_{J+1}) тоже не существует. Таким образом, уравнение (8.63) для $i = J$ следует заменить поверхностным граничным условием некоторого вида, например условием «стоячей волны»

$$(\delta P/P)_{J-1/2} = -(\omega^2 r_J^3 / GM + 4) \delta r_J / r_J, \quad (8.65)$$

где величина слева зависит от δr_J и δr_{J-1} , а G и M — гравитационная постоянная и полная масса звезды соответственно*.

Итак, если отбросить X_{-1} и X_{J+1} , принять $X_0 = 0$ и использовать граничное условие на поверхности звезды, то последовательность X_i ($i = 1, \dots, J$)

* Строго говоря, разностное уравнение (8.65) является нецентрированным. Однако это, вероятно, не имеет очень большого значения, особенно если величина $\delta P/P$ сильно меняется в самых поверхностных областях (в большинстве случаев это, по-видимому, довольно хорошее приближение).

можно рассматривать как *матрицу-столбец*, на которую действует матрица с элементами A_j, B_j, C_j и т.д. (элементам A_j, B_j и C_{j-1} должны быть приспаны определенные значения). Отметим, что благодаря введению новых независимых переменных матрица, действующая на X , стала симметричной; это свойство в дальнейшем окажется полезным.

Теперь определим симметричную трехдиагональную матрицу \mathcal{M} как матрицу, главную диагональ которой образуют элементы b_i , верхнюю прилегающую «диагональ» — элементы a_i , и нижнюю прилегающую «диагональ» — элементы c_i , причем

$$\begin{aligned} b_i &= B_i, & i &= 1, \dots, J, \\ a_i &= A_{i+1}, & i &= 1, \dots, J-1, \\ c_i &= C_{i-1}, & i &= 2, \dots, J. \end{aligned} \quad (8.66)$$

Таким образом, задача решения линейного аднабатического волнового уравнения рассматриваемыми методами эквивалентна решению следующей задачи об отыскании собственных значений и собственных векторов матрицы \mathcal{M} :

$$(\mathcal{M} - \omega^2 I)X = 0, \quad (8.67)$$

где I — единичная матрица.

Поскольку матрица \mathcal{M} — вещественна и симметрична, все ее собственные значения вещественны (см., например, [44, р. 35]). (Это свойство согласуется с тем, что мы уже знаем о линейном аднабатическом волновом уравнении, см. разд. 8.8.) Собственные значения — это J вещественных корней характеристического полинома

$$|\mathcal{M} - \omega^2 I| = 0, \quad (8.68)$$

где прямые скобки обозначают определитель указанной величины.

Вычисление этого определителя и нахождение собственных значений удобно осуществлять, используя свойства последовательностей Штурма (см. ниже). Однако сначала введем определитель m -го порядка $D_m(\lambda)$ как определитель симметричной трехдиагональной матрицы, у которой первые m строк и столбцов такие же, как у матрицы $\mathcal{M} - \lambda I$. Далее, разлагая $D_m(\lambda)$ по элементам последнего столбца, представим этот определитель в виде суммы двух определителей $(m-1)$ -го порядка. Тот из них, который умножается на коэффициент a_{m-1} , в свою очередь разложим по элементам последней строки. В результате получим

$$D_m(\lambda) = (b_m - \lambda)D_{m-1}(\lambda) - a_{m-1}c_m D_{m-2}(\lambda). \quad (8.69)$$

Это рекуррентное соотношение удобно использовать для вычисления определителя $D_m(\lambda)$, который, очевидно, является полиномом m -го порядка относительно λ . Дифференцируя соотношение (8.69) по λ , получаем еще одно полезное соотношение:

$$D'_m(\lambda) = -D_{m-1}(\lambda) + (b_m - \lambda) D'_{m-1}(\lambda) - a_{m-1}c_m D'_{m-2}(\lambda), \quad (8.70)$$

где штрихами обозначены производные по λ .

Определим теперь последовательность полиномов

$$\begin{aligned} D_0(\lambda) &= 1, \\ D_1(\lambda) &= b_1 - \lambda, \\ D_2(\lambda), D_3(\lambda), \dots, \end{aligned} \quad (8.71)$$

где $D_2(\lambda), D_3(\lambda), \dots$ получаются последовательно с помощью формулы (8.69). Отметим, что определитель $D_f(\lambda) = |\mathcal{M} - \lambda I|$ представляет собой характеристический полином нашей задачи.

Нетрудно показать, что последовательность полиномов (8.71) образует последовательность Штурма (см. [449, р. 351]). Поэтому можно использовать теорему Штурма (см. [449, р. 352]). Пусть $q_m(\lambda)$ — число изменений знака в последовательности значений полиномов $\{D_m(\lambda)\}$, т.е. число, показывающее, сколько раз определитель $D_k(\lambda)$ меняет знак, когда k последовательно пробегает значения $0, 1, 2, \dots, m$. Тогда мы имеем следующий результат: $q_m(\lambda)$ равно числу корней (собственных значений) полинома $D_m(\lambda)$, меньших λ . В частности, если $q_f(\lambda)$ — число изменений знака в последовательности $D_0(\lambda), D_1(\lambda), \dots, D_f(\lambda)$, то оно равно числу корней полинома $D_f(\lambda)$, значения которых меньше λ .

Итак, процедуру нахождения собственных значений линейного адиабатического волнового уравнения с помощью матричных методов можно суммировать следующим образом:

1. С помощью рекуррентного соотношения (8.69) последовательно вычисляем значения полиномов $D_0(0), D_1(0), \dots, D_f(0)$. Если происходит хотя бы одно изменение знака, то D_f имеет отрицательные корни, что свидетельствует о динамической неустойчивости.

2. Если $q_f(0) = 0$, то начинаем использовать итерационный метод Ньютона — Рафсона, беря для нулевой итерации $\lambda^{(0)} = 0$. Далее, положим $D_f(\lambda^{(n+1)}) = 0$; значение λ в $(n+1)$ -й итерации $\lambda^{(n+1)}$ представим как значение λ в n -й итерации $\lambda^{(n)}$ плюс некоторая поправка; разлагая затем $D_f(\lambda^{(n+1)})$ в ряд Тейлора относительно значения $\lambda^{(n)}$ и ограничиваясь членами первого порядка, получим приближенную формулу

$$\lambda^{(n+1)} = \lambda^{(n)} - D_f(\lambda^{(n)})/D'_f(\lambda^{(n)}). \quad (8.72)$$

Производные $D'_f(\lambda)$ определяются из рекуррентного соотношения (8.70). Эта процедура быстро сходится к значению $\lambda_0 = \omega_0^2$ — собственному значению для основной моды.

3. При заданном λ_0 подбираем такое значение $\lambda > \lambda_0$, при котором $q_f(\lambda) = 2$. Использование схемы Ньютона — Рафсона быстро даст значение $\lambda_1 = \omega_1^2$.

4. Повторяя операции п. 3, находим столько собственных значений, сколько желаем.

Предположим, что мы нашли собственные значения $\lambda_0, \lambda_1, \dots$. Последний вопрос, на который теперь нужно ответить, состоит в том, как же все-таки получить собственный вектор $(\delta r_0, \delta r_1, \dots, \delta r_f)$, соответствующий каждому собственному значению λ_i ?

Напомним, что величины X_i [пропорциональные δr_i , см. (8.62)] определяются соотношением (8.63). Если в этом выражении положить $i = 1$ и вспомнить, что было принято $X_0 = 0$, то получим линейное соотношение между X_1 и X_2 . Полагая $i = 2$, найдем X_3 , которое в свою очередь можно выразить через X_2 , и т.д. Предположим поэтому, что для любого i

$$X_{i-1} = d_{i-1} X_i, \quad (8.73)$$

где коэффициенты d_{i-1} пока неизвестны. Используя формулу (8.73) для $i = 1$, можно показать, что $d_0 = 0$, поскольку в общем случае $X_1 \neq 0$. Чтобы найти значения остальных коэффициентов d_i , подставим (8.73) в (8.63) и разрешим уравнение относительно X_i . Результатом будет выражение, сходное с (8.73), но с заменой i на $i + 1$. Таким способом мы получаем следующее рекуррентное соотношение, с помощью которого можно последовательно вычислить все коэффициенты d_1, \dots, d_{J-1} :

$$d_i = A_{i+1}/(B_i - \omega^2 - C_{i-1}d_{i-1}), \quad i = 1, \dots, J-1. \quad (8.74)$$

Далее, чтобы найти X_i , примем условие нормировки, скажем $\delta r_J = 1$, т.е. $X_J = (\mathcal{M}_J)^{1/2}$. Тогда из уравнения (8.73) последовательно определяются все остальные величины X_i , $i = J-1, \dots, 1$. Таким образом, задача полностью решается*.

8.12в. СВОДКА РЕЗУЛЬТАТОВ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЗВЕЗДНЫХ МОДЕЛЕЙ

В табл. 8.1 (которая представляет собой по существу табл. 3 из работы [133], воспроизведенную с разрешения Американского института физики) суммированы некоторые свойства решений линейного адиабатического волнового уравнения как для основной моды, так и для первой гармоники** для нескольких звездных моделей с $\Gamma_1 = 5/2$ (см. также [345, Table 12]. Несколько характерных собственных функций представлены на рис. 8.2 (рис. 14 из работы [133], воспроизведенный с разрешения Американского института физики).

Из табл. 8.1 и рис. 8.2 следуют важные закономерности, которые заслуживают внимания. Во-первых, с увеличением степени концентрации массы к центру, оцениваемой отношением $\rho_c/\bar{\rho}$, безразмерная собственная частота Ω_0^2 основной моды, равная $\sigma_0^2 R^3/GM$, в целом возрастает, хотя и не монотонно. Именно такого поведения мы и ожидали (разд. 8.9). Во-вторых, как для основной моды, так и для первой гармоники отношение $|\xi_R/\xi_c|$ значений ξ на поверхности и в центре показывает сильную положительную корреляцию с величиной $\rho_c/\bar{\rho}$. Следовательно, для звезд с сильной концентрацией массы к

* Такой метод решения системы уравнений вида (8.63), широко используемый при численном исследовании задач математической физики, называется в советской научной литературе методом прогонки. — Прим. ред.

** Термин *первая гармоника* употребляется неверно, так как в действительности он подразумевает наличие соизмерности между самой низкой и ближайшей к ней собственными частотами. Правильный термин — *первый обертон*. Однако в соответствии с установившейся в теории пульсации терминологией, в данной книге мы будем считать оба термина равнозначными.

ТАБЛИЦА 8.1

Решение адиабатического волнового уравнения для избранных звездных моделей ($\Gamma_1 = 5/3$)^a [133]

Модель	$\rho_c/\bar{\rho}$	$\sigma_0^2 R^3/GM$	$Q_0 = \frac{\Pi_0}{\rho_0} \times \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{1/2}$, сутки	Π_1/Π_0	$(\xi_R/\xi_c)_{\bar{\rho}}$	$(\xi_R/\xi_c)_1$	Узел ξ_1 , r
Однородная (политропа $n = 0$) ^б	1	1	0,1158	0,28	1	-0,4	$x = 0,845$ $q = 0,603$
Политропа, $n = 1$	3,30	1,892	0,0842	0,396	1,24	—	—
Линейная модель, $\rho = \rho_c(1 - x)$ [559]	4,00	1,836	0,0846	0,389	—	—	$x = 0,76$
Конвективная модель (политропа, $n = 1,5$)	5,99	2,712	0,0703	0,465	1,42	-3,39	$x = 0,72$ $q = 0,83$
Политропа, $n = 2$	11,4	4,00	0,0579	0,548	2,37	—	—
Модель 4 Эпштейна с внешней конвективной зоной ^в	$1,9 \cdot 10^3$	4,30	0,0558	0,543	$7,89 \cdot 10^3$	$-1,462 \cdot 10^4$	$x = 0,76$
Стандартная модель (политропа, $n = 3$)	54,2	9,261	0,0383	0,738	22,41	-59,12	$x = 0,67$ $q = 0,993$
Политропа, $n = 3,5$	153	12,69	0,0325	0,772	255	—	—
Политропа, $n = 4$	622	15,38	0,0295	0,779	$5,95 \cdot 10^3$	—	—
Модель 4 Эпштейна [204]	$1,9 \cdot 10^6$	14,082	0,0309	0,765	$6,124 \cdot 10^5$	$-1,05 \cdot 10^6$	$x = 0,76$ $q = 0,9999$

^a Данные для этой таблицы заимствованы (если не указано особо) из работ [279; 345; Table 12; 446].^б Политропные звездные модели характеризуются соотношением $P = \text{const} \cdot \rho^n + 1/\nu$, где n — показатель политропы. Детальное рассмотрение свойств политропных моделей можно найти в монографиях [71, гл. 4; 146, §23.1].^в В этой модели относительная толщина конвективной зоны составляет 0,94; относительная масса конвективной зоны равна 0,70 [334].^г Здесь x — относительный радиус, а q — относительная массовая координата.

центру, а также с заметно отличающимся от $\frac{1}{2}$ значением Γ_1 , амплитуды пульсаций в поверхностных областях намного больше, чем в центральных, т.е. пульсации не проникают в относительно массивные ядра этих звезд, где содержится большая часть массы.

Описанное поведение относительной амплитуды пульсаций приводит к далеко идущим выводам о причине пульсаций обычных типов пульсирующих звезд. Большинство таких звезд — гиганты или сверхгиганты (см., например, [133, § 9.1]), и в соответствии с современными представлениями о звездной эволюции они должны иметь высокую степень концентрации массы к центру. Эти выводы будут обсуждены в гл. 10. Кроме того, поведение относительной амплитуды пульсаций с глубиной позволяет сделать важные выводы о том, какие области в звезде определяют значение периода пульсаций (см. разд. 8.13).

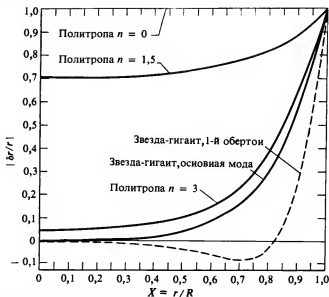


рис. 8.2. Собственные функции основной моды (сплошная линия) и первой гармоники (штриховая линия) для избранных звездных моделей. Абсцисса — относительное расстояние от центра звезды, ордината — полуамплитуда относительных изменений радиуса [133, Fig. 14]. (С разрешения Американского института физики.)

Приведенные результаты наводят на мысль, что радиальные звездные пульсации (по крайней мере в звездах, подобных гигантам и сверхгигантам) представляют собой явление, затрагивающее практически только внешние звездные слои. Это предположение подтверждается рассмотрением пульсационной энергии, которой обладает такая пульсирующая звезда. В работе [132] показано, что полная пульсационная энергия (сумма кинетической и потенциальной энергии) типичной цефеиды, усредненная по периоду, приблизительно на восемь порядков величины меньше гравитационной энергии. В ре-

альных звездах (особенно в гигантах и сверхгигантах) именно высокая степень концентрации массы к центру приводит к тому, что с энергетической точки зрения радиальные звездные пульсации обычно представляют собой явление в поверхностных слоях звезды.

8.13. Весовые функции

В настоящем разделе мы рассмотрим ставшую ныне классической статью Эпштейна [204]. Он использовал интегральное выражение (8.30) для частоты σ^2 любой моды k . После численного решения линейного адиабатического волнового уравнения для $\xi_k(r)$ он вычислил подынтегральное выражение в числителе уравнения (8.30). Это подынтегральное выражение можно рассматривать как своего рода «весовую функцию», относительная величина которой показывает, какие части звезды вносят наибольший вклад в значение σ_k^2 . Эпштейн нашел, что для основной моды в моделях с высокой степенью концентрации массы к центру весовая функция имеет сильный одиночный максимум в окрестности уровня $x (= r/R) \approx 0,75$ и очень мала в центральных областях звезды. Поэтому можно полагать, что период основной моды (для моделей с высокой концентрацией массы к центру) определяется главным образом условиями в оболочке, скажем вблизи уровня $x \approx 0,75$, и что период почти не зависит от условий в центральных областях, где заключена большая часть массы.

Для первой гармоники весовая функция имеет острый одиночный максимум при $x \approx 0,85$. Следовательно, приведенные выводы применимы и к этой моде.

Позднее аналогичное исследование провел Петерсен [440], который при оценке весовых функций использовал более реалистичные звездные модели. Эта работа позволила уточнить ряд деталей, оставшихся недоуясненными в исследовании Эпштейна [204].

Сделанные выводы находят непосредственное применение в современных расчетах пульсаций (по крайней мере для моделей с высокой концентрацией массы к центру). Если центральные области модели слабо влияют на периоды, то часто при расчете периодов эти области можно рассматривать лишь очень грубо. Например, в расчетах, подобных [300], центральные области модели (содержащие большинство сложных деталей, связанных с предшествующей эволюцией звезды) обычно заменяют несжимаемым ядром, которое, конечно, вообще не участвует в пульсациях. На практике в расчетах такого рода обычно проводят контрольные вычисления, чтобы убедиться, что радиус ядра достаточно мал и не оказывает заметного влияния на периоды.

Приложение идей, связанных с весовыми функциями, к нерадиальным звездным колебаниям кратко рассматривается в разд. 17.13.

8.14. Влияние переменного значения Γ_1 в оболочке

Влияние пространственного изменения показателя адиабаты Γ_1 ($= [d \ln P / d \ln \rho]_{\text{ад}}$) на периоды радиальных адиабатических пульсаций звезд

ды можно рассмотреть на основе либо самого линейного адиабатического волнового уравнения, либо интегральных выражений, выведенных в разд. 8.9. Пространственное изменение показателя адиабаты Γ_1 происходит, например, в тех областях звезды, где некоторый элемент с высоким содержанием, такой, как водород или гелий в одном из двух состояний (нейтральный или однократно ионизованный), приблизительно наполовину ионизован. В этих областях Γ_1 падает до значений, близких к единице, отражая тот факт, что основная часть работы адиабатического сжатия переходит здесь в энергию ионизации и лишь относительно небольшой остаток идет на увеличение кинетической энергии тепловых движений, т.е. на повышение температуры. Качественно этот эффект охватывает все моды радиальных пульсаций. Однако по причинам, изложенным в разд. 8.7, эффект наибольший для основной моды, и мы имеем в виду прежде всего именно эту моду.

В любом случае вывод один и тот же: наличие зоны ионизации во внешних частях звезды приводит к уменьшению собственной частоты, т.е. к увеличению периода пульсаций вследствие влияния ионизации на значение Γ_1 . Это заключение косвенно подтверждается детальными расчетами.

8.15. Приближенные формулы для собственных значений и результаты их использования

В разд. 8.10 мы показали, что вещественное число Σ^2 можно выразить формулой, очень похожей на (8.36), в которой безразмерная величина $\alpha(u)$ определяется в соответствии с (8.35). Мы знаем, что если функция $u(r)$ совпадает с собственной функцией $\xi_k(r)$ k -й моды, то Σ^2 равно собственному значению σ_k^2 этой моды. Кроме того, известно, что собственные значения линейного адиабатического волнового уравнения подчиняются принципу экстремума, который для случая основной моды является принципом минимума. Следовательно, если в качестве пробной функции взять $u(r) = \text{const}$, то мы получим верхний предел на σ_0^2 , определяемый соотношением (8.44). Таким образом, приближенное выражение для квадрата угловой частоты основной моды имеет следующий вид:

$$\sigma_0^2 \approx \Sigma_u^2 = \text{const} \quad (8.75)$$

где $\Sigma_u^2 = \text{const}$ определяется соотношением (8.44). Можно ожидать, что приближенное выражение (8.75) даст довольно точные значения периодов радиальных пульсаций звезд, за исключением, вероятно, моделей с высокой степенью концентрации массы к центру (см. ниже).

Некоторые результаты представлены в табл. 8.2, составленной на основе данных Леду и Пекериса [341] и Росселанда [465] (см. также [279]). Величина $\rho_c/\bar{\rho}$ — отношение центральной и средней плотностей, показатель адиабаты Γ_1 принимается постоянным по всей звезде, а $\Pi_0/\Pi_{0,\text{exact}}$ — отношение периода пульсаций в основной моде, вычисленного по (8.75), к периоду, определенному путем фактического решения задачи о собственных значениях. Видно, что наши ожидания в целом подтверждаются. Можно заключить, что для звезд, имеющих меньшую или такую же, как у звезд главной последователь-

ности, степень концентрации массы к центру (т.е. $\rho_c/\bar{\rho} \leq 60$), приближенное выражение (8.75) дает значения периодов основной моды с точностью около 10%. Даже для звезд с высокой концентрацией массы к центру, таких, как желтые или красные гиганты или сверхгиганты (а к этим классам относятся, по-видимому, большинство обычных типов пульсирующих звезд, см., например, обзор [133, разд. 9.1]), приближенное выражение (8.75) может все-таки дать значения периодов, которые ошибочны не более чем, скажем, в 2 — 3 раза. Более точное приближение для моделей с высокой концентрацией вещества к центру будет представлено ниже.

ТАБЛИЦА 8.2

Сравнение точного и приближенного периодов основной моды для избранных звездных моделей

Модель	$\rho_c/\bar{\rho}$	Γ_1	$\Pi_0/\Pi_0, \text{ экст}$
Политропа, $n = \frac{3}{2}$ (полностью конвективная звезда)	5,991	$\frac{3}{2}$	0,996
Политропа, $n = 2$	11,40	1,428	0,964
Политропа, $n = 3$ (стандартная модель)	54,18	$\frac{3}{2}$ (?)	0,957
Модель Каулинга (непрозрачность $\propto \rho T^{-3.5}$)	37,0	$\frac{3}{2}$	0,907
Политропа, $n = 4$	622,4	1,428	0,682

Отметим, что выражение (8.75) является, вероятно, хорошим приближением для любой равновесной модели с постоянным значением показателя адиабаты Γ_1 , близким к $\frac{3}{2}$. Причина здесь в том, что, как было указано в разд. 8.10, при $\Gamma_1 = \frac{3}{2}$ собственная функция стремится к постоянному значению, а такое пространственное постоянство и предполагалось для пробной функции, использованной для вывода выражения (8.75).

Леду и др. [343] попытались улучшить это выражение и приняли в качестве пробной функции $u(r) = \bar{\rho}/\rho(r)$. Здесь $\bar{\rho}(r)$ — средняя плотность внутри сферы радиуса r , а $\bar{\rho}$ — средняя плотность всей звезды. С помощью этой пробной функции была получена приближенная формула для σ_0^2 при $\Gamma_1 = \text{const}$. Эта формула приведена в статье Леду и Вальравена [345, eq. (60.14)]. По утверждению авторов, формула дает хорошие результаты для широкого класса звездных моделей.

ГЛАВА 9

ЛИНЕЙНЫЕ НЕАДИАБАТИЧЕСКИЕ РАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

В этой главе мы сохраним в уравнениях неадиабатические члены, которые были опущены в гл.8. Однако мы по-прежнему будем рассматривать малые чисто радиальные колебания относительно конфигурации, находящейся в со-

стоянии полного равновесия — гидростатического и теплового. Кроме того, мы пренебрежем любыми изменениями химического состава вследствие ядерных реакций и примем остальные упрощающие предположения, сформулированные в начале гл. 4 и 6. (В частности, если не оговорено особо, мы будем пренебрегать вязкими напряжениями и другими необратимыми эффектами.)

Поскольку система больше не является консервативной, можно рассчитывать найти решения с комплексными частотами, т.е. решения, характеризующие вековым увеличением или уменьшением амплитуды пульсаций. Поэтому появляется возможность исследовать важный вопрос о пульсационной неустойчивости, или, другими словами, о причинах пульсаций звезд.

В разд. 9.1 будет дан обзор проблемы преимущественно с физической точки зрения, а ее некоторые математические аспекты будут рассмотрены в разд. 9.2. Поскольку эти вопросы уже довольно подробно обсуждены, например, в статье Кокса [133] и в книге Кокса и Джули [146, Ch. 27], наши замечания будут относительно краткими. Один из пунктов разд. 9.2 посвящен практическому методу решения этой математической задачи. В разд. 9.3 мы рассмотрим интегральные выражения для собственных значений, а в разд. 9.4 представим и несколько обобщим оценку коэффициента устойчивости, полученную Эддингтоном.

9.1. Обзор проблемы: физическое рассмотрение

Здесь мы просто суммируем некоторые из основных идей, поскольку рассматриваемые вопросы уже довольно подробно обсуждены в упомянутых выше работах, к которым мы и отсылаем интересующегося читателя за дополнительной информацией.

Интересно отметить, что для звезды как целого ожидаемые неадиабатические эффекты обычно довольно малы, порядка Π/t_K (Π — период пульсаций, t_K — кельвиновское время), т.е. в общем на много порядков меньше единицы, как было показано в гл. 2. Это и объясняет, почему простая адиабатическая теория дает такое хорошее описание многих характеристик пульсирующих звезд, например, периодов. Предположение адиабатических пульсаций в звездах часто оказывается намного более хорошим приближением, чем предположение адиабатических звуковых волн, используемое в науках о Земле.

Вследствие относительно низких температур во внешних слоях звезд вариации светимости δL , обычно практически неизменны в пространстве и зависят только от времени. Изменения физических условий здесь существенно неадиабатические.

Хотя неадиабатические эффекты в большей части пульсирующей звезды незначительны, они все-таки приводят к медленному изменению амплитуды пульсаций. Это медленное изменение амплитуды происходит, по существу, из-за небольших фазовых сдвигов между изменениями давления и плотности, скажем, между их максимальными значениями. А фазовые сдвиги в свою очередь обусловлены наличием производных по времени в уравнении энергии (4.30а) или (5.34а).

Из уравнения энергии легко определить направление этих фазовых сдвигов. Например, если при максимальной плотности $dq/dt > 0$ (локальные приращения тепла), то давление P будет еще продолжать расти, когда плотность ρ достигнет своего максимума. Следовательно, в данном случае максимум давления будет иметь место после максимума плотности, т.е. максимум δP будет запаздывать относительно максимума $\delta \rho$.

Влияние фазовых сдвигов на амплитуду пульсаций легко понять из теоремы сохранения механической энергии в формулировке (4.24). Если проинтегрировать это уравнение по полному периоду Π , предполагая, что в конце периода система возвращается в исходное состояние, то консервативный член гравитационной энергии исчезает. Таким образом, мы получаем выражение для изменения $\Delta \mathcal{E}$ кинетической энергии звезды в течение периода пульсаций; очевидно, $\Delta \mathcal{E} = W$, где W — полная работа, совершенная над звездой силами гравитации и силами, обусловленными градиентом давления, действующими в течение периода на каждый элемент массы звезды. Эта величина в точности равна работе PdV , совершенной в течение периода всеми элементами массы над окружающими их слоями.

Такое рассмотрение приводит к следующему упрощенному описанию пульсационной неустойчивости звезд. Пусть звезда состоит из (бесконечно) большого числа элементарных независимых тепловых машин, работающих по циклу Карно, причем каждому слою массой dm соответствует одна такая машина. Если сумма интегралов работы по всем элементам массы положительна, то $\Delta \mathcal{E} > 0$ и имеет место пульсационная неустойчивость; если же эта сумма отрицательна, то $\Delta \mathcal{E} < 0$ и имеет место пульсационная устойчивость.

Предлагаемая картина позволяет легко определить, какие части звезды являются областями «возбуждения», а какие — областями «затухания». Критерий для отождествления двух этих типов областей следующий: *область, которая при максимальном сжатии накапливает тепло, является областью возбуждения*. И обратно, *область, которая при максимальном сжатии теряет тепло, является областью затухания*. Отметим, что этот критерий довольно общий и не зависит ни от каких предположений о механизме переноса тепла.

Можно теперь ввести характерное время τ_d изменения амплитуды пульсаций в е раз:

$$1/\tau_d = -\langle dW/dt \rangle / 2\langle \delta \Psi \rangle, \quad (9.1)$$

где $\delta \Psi$ — полная пульсационная энергия звезды (сумма кинетической и потенциальной энергии; ниже эта полная пульсационная энергия будет определена более точно), а угловые скобки указывают, что берется среднее значение за период пульсаций Π . Множитель $1/2$ учитывает то обстоятельство, что амплитуда пульсаций растет или убывает вдвое медленнее, чем их энергия. В пределе малых амплитуд (линейная теория) правая часть выражения (9.1) равна коэффициенту устойчивости κ :

$$\kappa = 1/\tau_d. \quad (9.2)$$

Поэтому устойчивость (затухание колебаний) означает, что $\kappa > 0$, а неустойчивость (нарастание колебаний) — что $\kappa < 0$.

Вероятно, простейшим механическим аналогом неадиабатических звездных пульсаций служат такой одномерный гармонический осциллятор, для которого возвращающая сила действует неточно в фазе со смещением. Повседневный пример — раскачивание на качелях.

Следует отметить, что возвращающие силы, которые не совпадают по фазе со смещением, приводят, как правило, к фазовым сдвигам между смещениями различных слоев звезды относительно друг друга. Можно ожидать поэтому, что неадиабатические пульсации в общем не представляют собой строго стоячих волн; это и подтвердили детальные расчеты: всегда должен присутствовать компонент, соответствующий бегущей волне (возможно, малый). Поэтому в течение цикла колебаний система никогда не проходит точно через свое равновесное состояние. Простая механическая аналогия — маятник, колебания которого не ограничены одной плоскостью. Однако в реальных пульсирующих звездах, согласно детальным расчетам, компонент, соответствующий бегущей волне, в большей части звезды очень мал, и мы имеем почти чистую стоячую волну, за исключением, вероятно, самых внешних слоев звезды.

В линейной теории есть несколько способов получить явное выражение для величины $\langle dW/dt \rangle = W/\Pi$ (предшествующее рассмотрение применимо и для почти синусоидальных пульсаций с произвольной амплитудой). Один способ — линеаризовать все величины, входящие в явном виде в выражение для W [см. первый член в правой части уравнения (4.24)]. Однако из-за введенного выше предположения об идеальном периодическом движении все величины, входящие в выражение для W , необходимо разложить в ряд с точностью по крайней мере до членов второго порядка относительно малых величин. Используя линеаризованное уравнение энергии (7.8) и проводя соответствующее интегрирование по периоду, получаем

$$\langle dW/dt \rangle = \langle d\mathcal{T}/dt \rangle = (1/\Pi) \int_M dm \int_0^\Pi (\Gamma_3 - 1)_0 (\delta\rho/\rho_0) \delta(\varepsilon - \delta L_r/\partial m) dt. \quad (9.3)$$

Другой, но по существу эквивалентный и более прямой метод вывода уравнения (9.3), не требующий разложения с точностью до членов второго порядка, состоит в следующем. Линеаризованное уравнение импульса (7.5) сначала умножают на $\delta\dot{r} = r_0\dot{\xi}$ ($\delta\dot{r} = \partial(\delta r)/\partial t$, $\xi = \delta r/r_0$), а затем интегрируют по всей массе звезды. Кроме того, используют общее термодинамическое тождество (5.35а) и в результате после небольших преобразований получают следующее выражение:

$$\delta\dot{\Psi}/dt = - \int_M (\Gamma_3 - 1)_0 T_0 (\delta s) [\partial(\delta\rho/\rho_0)/\partial t] dm, \quad (9.4)$$

где

$$\delta\Psi = \delta\mathcal{T} + \delta\Phi, \quad (9.5)$$

$$\delta\mathcal{T} = \int_M \frac{1}{2} (\delta\dot{r})^2 dm, \quad (9.6)$$

$$\delta\Phi = \int_M [\Gamma_{1,0} P_0 (\delta\rho/\rho_0)^2 / (2\rho_0) - 2Gm\xi^2/r_0] dm. \quad (9.7)$$

Отметим, что выражение для $\delta\Phi$ совпадает с аналогичным выражением (8.51), определенным в линейной адиабатической теории (разд. 8.11). Как было показано в разд. 8.11, $\delta\Phi > 0$ для любого малого возмущения при условии, что $\Gamma_{1,0} > 1/2$, отмечалась также связь $\delta\psi$ с величиной ψ из разд. 4.6.

Теперь проинтегрируем уравнение (9.4) по полному периоду Π , предполагая, что система в конце периода возвращается точно в исходное состояние. Интегрируя (9.4) по частям и считая процессы термодинамически обратимыми [см. уравнение (7.10)], получаем выражение, совпадающее с (9.3).

Предположим теперь, что зависимость от времени имеет следующий вид:

$$\delta\rho/\rho = (\delta\rho/\rho)_{sp} \exp[i\omega t] = |(\delta\rho/\rho)_{sp}| \exp[i(\omega t + \phi_\rho)], \quad (9.8)$$

где ω — угловая частота колебаний, индекс 0 опущен, индексом «sp» помечена пространственная часть (в общем случае комплексная) указанной величины, а ϕ_ρ — фаза величины $(\delta\rho/\rho)_{sp}$, зависящая в общем случае от m (массы, заключенной внутри сферы радиуса r). Аналогичным образом записываем

$$\begin{aligned} \delta(\epsilon - \partial L_r/\partial m) &= \delta(\epsilon - \partial L_r/\partial m)_{sp} \exp[i\omega t] = \\ &= |\delta(\epsilon - \partial L_r/\partial m)_{sp}| \exp[i(\omega t + \phi_q)], \end{aligned} \quad (9.9)$$

где ϕ_q — фаза величины $\delta(\epsilon - \partial L_r/\partial m)_{sp}$. Подставим теперь (9.8) и (9.9) в (9.3) и при вычислении интеграла по времени примем, что величина $\omega = \sigma$ чисто вещественная. В результате получим

$$\langle d\delta\psi/dt \rangle = C_r/2, \quad (9.10)$$

причем комплексная величина C определяется следующим соотношением:

$$C = \int_M (\Gamma_3 - 1)(\delta\rho/\rho)_{sp}^* \delta(\epsilon - \partial L_r/\partial m)_{sp} dm = \quad (9.11a)$$

$$= C_r + iC_i, \quad (9.11b)$$

где индексы r и i относятся к действительной и мнимой частям. Величину C часто называют «интегралом работы». С другой стороны, полная энергия пульсаций (сумма кинетической и потенциальной энергии) в случае почти синусоидальных колебаний равна (разд. 8.11)

$$\delta\mathcal{E} = 2\overline{\delta\mathcal{T}} = \sigma^2 J/2, \quad (9.12)$$

где $\sigma = 2\pi/\Pi$, а величина J — осцилляторный момент инерции звезды для рассматриваемой моды (разд. 8.9). Тогда выражение для коэффициента устойчивости принимает следующий вид:

$$\chi = -C_r/(2\sigma^2 J), \quad (9.13)$$

и можно показать (разд. 9.3), что при $|\chi/\sigma| \ll 1$ это выражение является точным. Поэтому движение элементов массы в случае неадиабатических колебаний является почти периодическим с медленно возрастающей или убывающей амплитудой:

$$\xi(m, t) = \xi(m) \exp[i\sigma t - \chi t], \quad (9.14)$$

где χ определяется в хорошем приближении выражением (9.13). Следовательно

но, колебания возбуждаются, если $C_r > 0$, т.е. если $\kappa < 0$, и затухают, если $\kappa > 0$, т.е. если $C_r < 0$.

Основной эффект мнимой части C_i величины C заключается во влиянии на период пульсаций (разд. 9.3). В данном случае имеем

$$\kappa \approx \Sigma + C_i/(2\Sigma^2 J), \quad (9.15)$$

где Σ^2 — вещественное число, определенное в разд. 8.10, а последний член в правой части обычно мал по сравнению с первым.

Следует отметить, что величины в подынтегральном выражении для C должны быть вычислены, строго говоря, с помощью правильных неадиабатических собственных функций рассматриваемой задачи. Однако часто эти собственные функции заранее не известны. В таком случае уравнение (9.11) можно рассматривать как приближенное выражение для величины C , в котором правильные собственные функции заменены подходящими пробными функциями. Такая ситуация оказывается в определенной мере удовлетворительной, и использование пробных функций для приближенного вычисления C нашло широкое распространение в теории звездных пульсаций.

Обычный метод приближенной оценки C , часто применявшийся в прошлом и столь же часто применяемый теперь, основан на использовании квазиадиабатического приближения. Это приближение заключается в вычислении подынтегральной функции в выражении для C с помощью решений линейного адиабатического волнового уравнения (гл. 8). В частности, сначала для конкретной модели и рассматриваемой моды получают решение $\xi(m)$ линейного адиабатического волнового уравнения, а затем используют эту функцию при расчете величины $\delta T/T$, $d(\delta T/T)/dr$ и прочих с помощью адиабатических соотношений (5.36а) и (5.36б). Отсюда можно вычислить величину $\delta(\varepsilon - \partial L_r/\partial m)$, входящую в подынтегральную функцию в выражении для C . Если внешние неадиабатические области в звезде не очень протяженные, то такой метод может дать приемлемое приближенное значение C . Однако этот метод всегда следует использовать с большой осторожностью. Его серьезным недо-

ТАБЛИЦА 9.1
Времена затухания пульсаций
для типичных пульсирующих звезд

Тип звезды	$ \tau_d/P_0 ^{**}$
Классические цефеиды	$10^2 - 10^3$
Переменные типа RR Лирь	
Переменные типа δ Щита	
Карликовые цефеиды	$10^4 - 10^6$
Переменные типа W Девы	$10 - 20$
Долгопериодические переменные (переменные типа Миры Кита)	$1 - 10$

^{**} P_0 — период пульсаций в основной моде.

статком является, пожалуй, то, что величина δL_r , рассчитанная подобным образом, не остается постоянной в пространстве. Поэтому во внешних неадиабатических областях поведение величины δL_r , рассчитанной в квазиадиабатическом приближении, приводит к неоправданно завышенному ее вкладу в значение S . Простой приближенный способ для устранения указанной трудности состоит в интегрировании при расчете S только до переходной области (разд. 10.1).

В монографии Кокса и Джули [146, Ch. 27] можно найти грубые оценки ожидаемых значений времен τ_d затухания амплитуды пульсаций.

Табл. 9.1 суммирует результаты детальных расчетов времен затухания для некоторых известных типов пульсирующих звезд (по данным обзора [133]). Значения приведены по порядку величины в единицах периодов пульсаций в основной моде. По существу во всех случаях (за исключением, возможно, переменных типа Миры Кента) времена затухания значительно превышают периоды пульсаций в основной моде.

9.2. Математические аспекты

В этом разделе мы исследуем некоторые математические аспекты проблемы линейных радиальных неадиабатических пульсаций звезд. Ряд физических аспектов был рассмотрен в предыдущем разделе. В п. 9.2а мы проанализируем проблему с довольно общей точки зрения, а современные методы численного решения этой задачи для моделей звезд или звездных оболочек будут представлены в п. 9.2б. Наконец, в п. 9.2в мы перечислим некоторые основные особенности таких решений применительно к звездным моделям.

9.2 а. ОБЩЕЕ РАССМОТРЕНИЕ

Уравнения рассматриваемой задачи — это линеаризованные уравнения неразрывности, импульса, энергии, лучистого переноса и скорости генерации термоядерной энергии. (В принципе термин «лучистый перенос» следовало бы заменить на «перенос энергии». Однако поскольку в настоящее время надежной количественной теории конвективного переноса тепла не существует и она вряд ли появится в ближайшее время, из практических соображений мы вправе использовать вышеупомянутый термин.) Примем, что лагранжевы вариации всех переменных зависят от времени по закону $\exp[i\omega t]$, где $\omega = \pm\sigma + i\kappa$, причем σ и κ вещественны. Период пульсаций определяется значением σ , а κ — коэффициент устойчивости (разд. 9.1). Знаки плюс и минус при σ не имеют физического смысла, а просто соответствуют величине $(i\omega)$ и ее комплексно сопряженному значению $(i\omega)^*$ (разд. 9.3) Зависимые переменные — это пространственные части вариаций, например радиуса, плотности, температуры и светимости, для некоторого слоя вещества. Эти переменные мы будем обозначать соответственно ξ , $\delta\rho/\rho$, $\delta T/T$ и $\delta L_r/L_r$, рассматривая их как относительные вариации и опуская индекс «sp». Такие обозначения будут использоваться далее всюду в этой главе. Кроме того, обычно будет опускаться индекс нуль у равновесных величин. В общем случае все эти переменные сле-

дует считать комплексными, поскольку их фазы, как правило, имеют различные значения вдоль радиуса звезды.

При указанной зависимости от времени основные дифференциальные уравнения в частных производных становятся обыкновенными дифференциальными уравнениями с радиальным расстоянием в качестве независимой переменной. Эти уравнения являются линейными однородными уравнениями четвертого порядка относительно комплексных переменных, т.е. восьмого порядка относительно вещественных переменных. Таким образом, мы имеем четыре комплексные постоянные интегрирования и комплексную угловую частоту ω .

Если задана равновесная модель звезды или звездной оболочки, то имеют ся четыре граничных условия: два в центре или в основании оболочки, и два на поверхности. Эти граничные условия служат для определения четырех из пяти упомянутых комплексных постоянных. Вследствие однородности задачи одна из пяти комплексных постоянных должна оставаться произвольной и может быть использована для нормирования. Например, можно потребовать (как обычно и делают в таких расчетах), чтобы $\xi_R = 1$ (ξ_R — значение ξ на поверхности). Комплексным собственным значением является величина ω .

Разумные граничные условия обычно сводятся к тому, чтобы все относительные пульсационные переменные были регулярными как в центре, так и на поверхности. Очевидно, что в центре должны выполняться условия

$$\delta r = 0, \quad (9.16)$$

$$\delta L_r = 0. \quad (9.17)$$

Если рассматривается модель одной лишь оболочки, то в ее основании обычно принимают эти же условия (см. однако п. 9.26). Поскольку как r , так и L_r в центре обращаются в нуль (L_r вблизи $r = 0$ изменяется пропорционально r^3), условие регулярности требует, чтобы как $\delta r/r = \xi$, так и $\delta L_r/L_r$ оставались в центре конечными (такое требование, разумеется, неприменимо к $\delta L_r/L_r$, если в ядре звезды $L_r = 0$).

Условия (9.16) и (9.17) дают два комплексных соотношения между ω и значениями пульсационных переменных в центре (или в основании оболочки). Оба эти соотношения можно получить из уравнений неразрывности и энергии. Когда рассматривается полная модель звезды, а не только ее оболочка, уравнение неразрывности приводит к соотношению

$$(\delta \rho / \rho)_c = -3\xi_c, \quad (9.18)$$

где индексом c обозначены значения в центре. Уравнение энергии дает следующий результат [см. уравнение (7.12)]:

$$(\delta T / T)_c = (\Gamma_3 - 1)_c (\delta \rho / \rho)_c - (i / \omega) (\epsilon / c_V T)_c \times \\ \times [\lambda_c (\delta \rho / \rho)_c + \nu_c (\delta T / T)_c - (\delta L_r / L_r)_c]. \quad (9.19)$$

Отметим, что выражения (9.18) и (9.19) содержат неизвестные параметры ω , ξ_c и $(\delta L_r / L_r)_c$. Если рассматривается лишь оболочка звезды, оба этих выражения обычно заменяют двумя другими, но эквивалентными соотношениями с

нензвестными параметрами ω , $d\xi/dr$ и $d(\delta L_r/L_r)/dr$, причем две последние величины представляют значения этих производных в основании оболочки.

Конкретный вид граничных условий на поверхности зависит от предположений, сделанных относительно поверхностных слоев равновесной модели, и может учитывать ряд специфических особенностей (см., например, [36, 68, 131, 281, 324, 588]). Если атмосфера не очень протяженная, то обычно с достаточной точностью можно принять граничное условие стоячей волны [скажем, уравнение (8.10)]. Это граничное условие можно записать и в следующем виде (см. разд. 8.3):

$$(d\delta P/dr)_R = 0. \quad (9.20)$$

Такая формулировка справедлива, если на поверхности звезды плотность обращается в нуль.

Второе граничное условие на поверхности получают из уравнения для светимости. Обычно в поверхностных слоях можно предполагать чисто лучистый перенос энергии, но его можно описывать в различных приближениях. В простейшем случае, который исторически был рассмотрен одним из самых первых (см., например, [131]), принимают, что температура поверхности T_R равна нулю. Тогда условие регулярности требует, чтобы

$$\delta T_R = 0. \quad (9.21)$$

Если принять, что на поверхности справедливо приближение лучистой теплопроводности, то уравнение (9.21) вместе с предположением $T_R = 0$ и с условием регулярности приводит к следующему соотношению [см. уравнение (7.11)]:

$$(\delta L_r/L_r)_R = 4\xi_R - n_R(\delta\rho/\rho)_R + (s+4)_R(\delta T/T)_R, \quad (9.22)$$

где n_R и $-s_R$ — значения показателей степени в законе непрозрачности при плотности и температуре вблизи поверхности звезды соответственно.

В более реалистичном случае фотосферных граничных условий подходящее граничное условие для δT можно получить следующим образом. Если звездная атмосфера считается тонкой по сравнению с радиусом звезды и если изменения в ней происходят «неслишком быстро» (разд. 8.3), то зависимость температуры T от оптической глубины τ приближенно определяется моделью серой атмосферы (см., например, [372, 629]). Далее, связь изменения ΔL светимости L с изменениями Δr_{ph} и ΔT_e — радиуса фотосферы и эффективной температуры звезды соответственно — определяется путем варьирования соотношения $L \propto r_{ph}^2 T_e^4$. Если принять, что изменение δT температуры элемента массы обусловлено изменениями как T_e , так и τ (оптическая глубина, на которой находится элемент массы), то соотношение температуры — оптическая глубина для серой атмосферы показывает, что на малых оптических глубинах ($\tau \ll 1$) $\delta T/T \approx \Delta T_e/T_e$. Подставляя этот результат в соотношение, связывающее ΔL , Δr_{ph} и ΔT_e , и предполагая, что $\delta r \approx \Delta r_{ph}$ и $\delta L_r \approx \Delta L$, для заданного уровня (по массе) в атмосфере, получим

$$(\delta L_r/L_r)_R = 2\xi_R + 4(\delta T/T)_R. \quad (9.23)$$

Это соотношение обычно и используют как граничное условие для величины δT на уровне фотосферы.

Отметим, что, какое бы из уравнений (9.22) или (9.23) ни использовалось в качестве поверхностного граничного условия для δT , остаются неопределенными два параметра: ω и одна из величин $(\delta T/T)_R$, $(\delta L_r/L_r)_R$. Причина заключается в том, что граничное условие (9.20) определяет величину $(\delta P/P)_R$ (в предположении, что ξ_R уже выбрано), которая в свою очередь через уравнение состояния зависит от $(\delta \rho/\rho)_R$ и $(\delta T/T)_R$. Напомним, что центральные граничные условия оставляют неопределенными величины ω , ξ_c (или $(\delta \rho/\rho)_c$) и $(\delta L_r/L_r)_c$. Поэтому условие, чтобы четыре переменные ξ , $\delta P/P$, $\delta T/T$ и $\delta L_r/L_r$ были непрерывными по всей звезде, оказывается достаточным для определения значений всех четырех неизвестных (в общем случае комплексных) для каждой исследуемой моды. Таким образом, выполнение граничных условий является необходимым, по крайней мере в принципе, для определения детальных характеристик неадиабатических звездных пульсаций.

Полезно заметить, что если давление P на поверхности обращается в нуль (обычно это превосходное приближение), то из уравнения энергии, скажем (7.8), вытекает следующее соотношение:

$$[d(\delta L_r/L_r)/dr]_R = 0. \quad (9.24)$$

Данный результат согласуется с концепцией пространственно неизменных вариаций светимости во внешних слоях звезд (разд. 9.1).

Кроме того, можно показать (см. [346]), что если плотность ρ на поверхности обращается в нуль, то

$$[d^2(\delta L_r/L_r)/dr^2]_R = 0. \quad (9.25)$$

Следует подчеркнуть, что выражения (9.24) и (9.25) — это не граничные условия, а просто некоторые выводы, справедливые при указанных предположениях.

9.26. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Численное решение задачи о собственных значениях сопряжено с определенными вычислительными трудностями (см., например, [36, 131]), и лишь в последние годы были развиты достаточно эффективные методы (см. [68, 281]). (Бейкер и Киппенхан [37] в 1965 г. разработали метод, который до некоторой степени похож на методы Кастора [68] и Ибена [281], однако они не вычисляли ω как собственное значение полиой неадиабатической задачи.)

Трудности обусловлены в основном тем, что по всей звезде пульсации являются почти адиабатическими. Следовательно, если не использовать специальных приемов, то обычные методы сшивки, основанные на общих соображениях п. 9.2а, сталкиваются с серьезными практическими проблемами. Например, при численном интегрировании от поверхности к центру с использованием поверхностных граничных условий в решениях всегда появляются быстро расходящиеся члены, которые в конце концов делают результаты такого интегрирования практически непригодными.

Бейкер и Киппенхан [36] и Кокс [131] избежали эту трудность, заменив

внутренние граничные условия внутренним адиабатическим условием, приведенным выше, т.е. потребовав, чтобы по мере интегрирования вглубь решение стремилось к адиабатическому пределу. Таким путем для заданного значения ω были получены точные решения уравнений только для внешних слоев с температурой менее $\sim 10^5$ К (что обычно соответствует глубине от 0,05 до 0,5 радиуса звезды). В этих ранних исследованиях угловая частота пульсаций σ либо предполагалась известной из наблюдений или теории, как в [131], либо же определялась из решения адиабатического волнового уравнения [36]. При нахождении решения дифференциальных уравнений коэффициент устойчивости χ принимался равным нулю, а затем оценивался с помощью интегральных выражений (разд. 9.3), в которых использовались полученные решения. Такой метод определения коэффициента χ является довольно точным, если $|\chi/\sigma| \ll 1$, что обычно имеет место (разд. 9.1). В работах [131, 132, 345, 465] можно найти ссылки на еще более ранние приближенные методы исследования неадиабатических эффектов.

В современных вычислительных методах ядро звезды обычно не учитывается. Однако эти методы можно непосредственным и почти тривиальным образом обобщить, чтобы при необходимости или при желании учитывать и ядро (см., например, [154, 155, 640, 641]).

Теперь мы кратко опишем метод решения линейного неадиабатического волнового уравнения, предложенный и применявшийся Кастором [68]. Часть излагаемого материала основана на неопубликованных заметках Кастора и используется с его любезного согласия.

Покажем сначала, что соответствующие линеаризованные дифференциальные уравнения можно представить в специальном виде, на который и опирается метод. В этом методе в качестве основных уравнений рассматриваются уравнения импульса и энергии, поскольку только они обычно содержат в явном виде производные по времени. Уравнение импульса можно записать в форме (7.5), а уравнение энергии для термодинамически обратимых процессов (мы рассматриваем только их) в форме (7.10). Отметим, что в левой части уравнения импульса содержится величина $\delta \ddot{r} = \partial^2(\delta r)/\partial t^2$, а в правой — δr и $\partial(\delta P)/\partial t$. Уравнение энергии содержит в левой части величину $T\delta \dot{s}$, а в правой — $\delta \epsilon$ и $\partial(\delta L_r)/\partial t$. Однако величину $\delta \epsilon$ можно считать функцией δr и δT [см. уравнение (7.12)]. Аналогичным образом δL_r можно считать по крайней мере для переноса энергии в приближении лучистой теплопроводности функцией δr , δp , δT и $\partial(\delta T)/\partial t$ [см., например, выражение (7.11)]. Далее, на основании термодинамических соотношений (5.35а) и (5.35б) величины δT и δP можно рассматривать как функции δr и $T\delta s$. В свою очередь величину δp , согласно уравнению неразрывности [см., например, (5.24б) или (7.4)], можно считать функцией δr и $\partial(\delta r)/\partial t$. Таким образом, правые части уравнений импульса и энергии зависят в конечном счете от величин δr и $T\delta s$ и от их производных по t . Принимая зависимость от времени в форме $\exp(i\omega t)$, мы видим, что левые части этих уравнений являются функциями только от δr и $T\delta s$. Поэтому величины δr и $T\delta s$ можно взять в качестве основных зависимых перемен-

ных и записать уравнения импульса и энергии в следующем операторном виде:

$$\omega^2 \delta r = G_1(\delta r) + G_2(T \delta s), \quad (9.26a)$$

$$i \omega T \delta s = K_1(\delta r) + K_2(T \delta s), \quad (9.26b)$$

где G и K — линейные операторы. Прямым, но громоздким путем можно показать, что

$$G_1(y) = -4Gm\gamma/r^3 - 4\pi r^2 \partial[(\Gamma_1 P/V) \partial(4\pi r^2 y)/\partial m]/\partial m, \quad (9.27)$$

$$G_2(y) = 4\pi r^2 \partial[(\Gamma_3 - 1)\gamma/V]/\partial m \quad (9.28)$$

и для переноса энергии в приближении лучистой теплопроводности

$$\begin{aligned} K_1(y) = & [(\partial \varepsilon / \partial V)_T - (\partial \varepsilon / \partial T)_V (\Gamma_3 - 1) T / V] \partial(4\pi r^2 y) / \partial m - \partial(L_r 4\pi r^2 y / \pi r^3) / \partial m + \\ & + \partial\{(L_r / \kappa)[(\partial \chi / \partial V)_T - (\partial \chi / \partial T)_V (\Gamma_3 - 1)(T/V)] \partial(4\pi r^2 y) / \partial m\} / \partial m - \\ & - \partial\{(4\pi r^2)^2 (ac/3\kappa) \partial[4(\Gamma_3 - 1)(T^4/V) \partial(4\pi r^2 y) / \partial m] / \partial m\} / \partial m, \end{aligned} \quad (9.29)$$

$$\begin{aligned} K_2(y) = & (\partial \varepsilon / \partial T)_V \gamma / c_V + \partial[(L_r / \kappa c_V)(\partial \chi / \partial T)_V \gamma] / \partial m + \\ & + \partial[(4\pi r^2)^2 (ac/3\kappa) \partial(4T^3 \gamma / c_V) / \partial m] / \partial m. \end{aligned} \quad (9.30)$$

В этих формулах $V = 1/\rho$ — удельный объем, ε — скорость генерации энергии на единицу массы, κ — непрозрачность, а остальные символы имеют обычные значения. Кроме того, мы опустили индекс 0 у всех равновесных величин. Легко видеть, что G_1 , G_2 , K_1 и K_2 — это дифференциальные операторы соответственно второго, первого, третьего и второго порядка. Кроме того, $G_1(\delta r)/r$ совпадает с $\mathcal{L}(\delta r/r)$, где \mathcal{L} — линейный оператор, определенный выражением (8.23).

Интересно исследовать операторы G и K для случая, когда все коэффициенты можно считать постоянными. Такое рассмотрение позволит по порядку величины оценить влияние этих операторов. Кроме того, следуя Кастру, оставим в каждом соотношении только члены с производными самого высокого порядка. В этом случае можно получить относительно простые и верные по порядку величины выражения для $|G_1|$, $|G_2|$, $|K_1|$ и $|K_2|$, на основе которых можно дать физическую интерпретацию операторов. Например, подставляя вместо $\partial/\partial r$ l^{-1} , где l — характерная длина, можно показать, что

$$|G_1| \sim (\text{Время прохождения звуковой волной расстояния } l)^{-2}, \quad (9.31)$$

$$|K_2| \sim (\text{Время охлаждения посредством излучения области с характерным размером } l)^{-1}. \quad (9.32)$$

Интересно также отметить, что

$$|G_1/G_2| \sim |K_1/K_2| \sim v_s^2 \partial/\partial r, \quad (9.33)$$

где v_s — адиабатическая скорость звука. Из соотношения (9.33) вытекает

$$|G_1(\delta r)/G_2(T \delta s)| \sim |K_1(\delta r)/K_2(T \delta s)| \sim |[\delta \rho/\rho]/[(T \delta s)/c_V T]|, \quad (9.34)$$

где мы использовали приближенное соотношение $|\partial(\delta r)/\partial r| \sim |\delta \rho/\rho|$ и, кроме того, $v_s^2 = \Gamma_1 P/\rho \sim c_V T$.

Соотношение (9.34) устанавливает, что в обоих основных уравнениях (9.26а) и (9.26б) отношение первого и второго членов в правых частях того же порядка величины, что и отношение относительной флуктуации плотности $\delta\rho/\rho$ в течение периода к соответствующему изменению количества тепла $\delta q = T\delta s$ на единицу массы, выраженному в долях удельной внутренней энергии, приблизительно равной $c_V T$. В глубоких недрах звезды, где $c_V T$ относительно велико, $|G_1(\delta v)| \gg |G_2(T\delta s)|$ и $|K_1(\delta r)| \gg |K_2(T\delta s)|$, и только во внешних слоях оба члена в каждой паре становятся сравнимыми друг с другом.

Можно сказать, что член $G_2(T\delta s)$ учитывает влияние неадиабатичности на звездные пульсации, а член $K_1(\delta r)$ определяет тепловые потоки, обусловленные адиабатическими флуктуациями температуры, которые в свою очередь связаны с динамическими движениями. Приближение $i\omega T\delta s = K_1(\delta r)$ иногда называют квазиадиабатическим приближением (разд. 9.1).

В случае $G_2 = 0$ или $K_1 = 0$ имеем соответственно либо чисто адиабатические, либо чисто тепловые пульсации (гл. 8).

Используя разностную схему, подобную построенной выше при рассмотрении линейного адиабатического волнового уравнения (разд. 8.12б), уравнения (9.26) можно заменить следующими матричными уравнениями:

$$\omega^2 \mathbf{X} = G1\mathbf{X} + G2\mathbf{Y}, \quad (9.35a)$$

$$i\omega \mathbf{Y} = K1\mathbf{X} + K2\mathbf{Y}, \quad (9.35б)$$

где \mathbf{X} и \mathbf{Y} — матрицы-столбцы. Столбец \mathbf{X} состоит из $J + 1$ элемента (J — число зон в модели), а \mathbf{Y} — из J элементов. Кроме того,

$$X_i = (\mathcal{M}_i)^{1/2} \delta r_i, \quad Y_{i-1/2} = (T\delta s)_{i-1/2}, \quad (9.36)$$

$i = 1, \dots, J$; величина \mathcal{M}_i определена в п. 8.12б, а каждая из величин $G1$, $G2$, $K1$ и $K2$ представляет собой квадратную матрицу $J \times J$, многие элементы которой равны нулю.

В рамках принятой в п. 8.12б разностной схемы видно, что для каждого X_i (но неблизкого к любой из границ) уравнение импульса (9.35б) содержит величины X_{i-1} , X_{i+1} , $Y_{i-1/2}$, $Y_{i+1/2}$, три элемента матрицы $G1$ и два элемента матрицы $G2$. Аналогично для каждого $Y_{i-1/2}$ (также неблизкого к границам) уравнение энергии (9.35б) содержит величины $Y_{i-1/2}$, $Y_{i+1/2}$, X_{i-2} , X_{i-1} , X_i , X_{i+1} , четыре элемента матрицы $K1$ и три элемента матрицы $K2$. Таким образом, в этой разностной схеме уравнения (9.35) связывают семь последовательных «точек» модели, где под «точкой» мы понимаем либо поверхность раздела, либо середину зоны.

Явные выражения для этих матричных элементов, как правило, довольно сложные; некоторые конкретные примеры приведены Кастором [68]. В любом случае значения матричных элементов зависят от равновесной модели, граничных условий и т.д. и предполагаются известными.

Граничные условия могли бы выглядеть, например, следующим образом. В центре или в основании оболочки

$$\delta r_0 = 0 \quad (\text{т.е. } X_0 = 0), \quad \delta L_0 = 0. \quad (9.37)$$

На поверхности имеется ряд возможностей для выбора (разд. 9.2а), но целесообразно принять такие условия:

$$\begin{aligned}(\delta P/P)_{J-1/2} &= -(\omega^2 r_J^3/GM + 4)\delta r_J/r_J, \\ \delta L_J/L_J &= 2\delta r_J/r_J + 4\delta T_{J-1/2}/T_{J-1/2}.\end{aligned}\quad (9.38)$$

Конкретные граничные условия того или иного вида заметно влияют на значения матричных элементов в уравнениях (9.35), особенно вблизи границ. Вблизи этих границ уравнения (9.35) упрощаются, поскольку величины с отрицательными индексами или с индексами, большими J , не определены.

Если говорить конкретнее, то, как отметил Кастор [68], чтобы применить граничные условия, необходимо отбросить в уравнениях самую внутреннюю и самую внешнюю поверхности раздела (0 и J), а также самую внутреннюю и самую внешнюю зоны (1 и J). Можно показать, что граничные условия (9.37) и (9.38), используемые для этих зон и поверхностей раздела (какое бы число зон и поверхностей раздела ни рассматривалось), вместе с оставшимися уравнениями дают как раз правильное число уравнений для $2J + 1$ неизвестного нашей задачи. Эти рассуждения эквивалентны отбрасыванию величин с отрицательными индексами (таких, как X_{-1}) или с индексами, большими J (таких, как X_{J+1}), и присвоению специальных значений соответствующим матричным элементам.

Следуя Кастору [68], уравнения (9.35) можно записать как одно матричное уравнение, если объединить переменные (чередую их) в одну матрицу-столбец Z , состоящую из $2J$ элементов: $Y_{1/2}, X_1, Y_{3/2}, X_2, \dots, Y_{J-1/2}, X_J$ (принимая $X_0 = 0$). Таким образом, уравнения (9.35) можно представить в виде

$$\mathcal{M}Z = 0, \quad (9.39)$$

где \mathcal{M} — комплексная матрица, состоящая из $(2J) \times (2J)$ элементов (поскольку ее элементы комплексные) и являющаяся ленточной матрицей, причем ширина «ленты» не более семи элементов. Отметим, что первая строка матрицы \mathcal{M} связана только с уравнением энергии (9.35б), а последняя — только с уравнением импульса (9.35а).

Рассмотрим теперь метод нахождения собственных значений ω^2 и собственных векторов матричного уравнения (9.39). Поскольку уравнение является однородным, его можно решить относительно собственных векторов, только если известны собственные значения, а они, конечно, заранее не известны.

Кастор [68] предполагает, что соответствующая адиабатическая задача уже решена, т.е. известны адиабатические собственные векторы. Затем он использует их для получения первых пробных оценок неадиабатических собственных частот, основываясь, по существу, на интегральных выражениях, аналогичных рассматриваемым в разд. 9.3. Но такие пробные оценки все же не удовлетворяют уравнению (9.39), и поэтому далее используется следующая процедура.

Кастор [68] убирает из системы (9.39) последнее уравнение — уравнение

импульса для самой внешней поверхности раздела. Тогда матричное уравнение (9.39) заменяется уравнением

$$\mathcal{M} \mathbf{Z}' = \mathbf{W}, \quad (9.40)$$

где матрица \mathcal{M} — это матрица M без последней строки и последнего столбца; \mathcal{M} содержит $(2J - 1) \times (2J - 1)$ элемент. Столбец \mathbf{Z}' — это столбец \mathbf{Z} без одного элемента (а именно, без элемента X_J , который в конечном счете для нормировки принимают равным единице); \mathbf{W} — матрица-столбец, все элементы которой, за исключением нескольких последних, равны нулю. Поскольку уравнение (9.40) теперь уже неоднородное, ω в нем не обязательно будет собственной частотой. Следовательно, для заданного Ω уравнение (9.40) можно решить относительно $2J - 1$ неизвестного $Y_{1/2}, X_1, Y_{1/2}, \dots, X_{J-1}, Y_{J-1/2}$, выразив неизвестные через X_J . Поскольку ω уже не обязательно собственное значение, последнее уравнение системы, которое было опущено, может и не удовлетворяться. Это уравнение можно записать в следующем виде:

$$f(\omega) = G_1(J, 1)X_{J-1} + G_2(J, 1)Y_{J-1/2} + [G_1(J, 2) - \omega^2]X_J, \quad (9.41)$$

где $f(\omega) = 0$ при $\omega = \omega_0$ (ω_0 — собственная частота) и где G_1 и G_2 — элементы матриц.

Далее Кастор [68] замечает, что $X_{J-1}, Y_{J-1/2}$ и X_J — рациональные функции (равные отношению двух полиномов), поскольку каждая из них является решением совместной системы линейных алгебраических уравнений. Следовательно, функция $f(\omega)$ регулярна всюду, за исключением своих полюсов (см. любой учебник математического анализа, например [225]). Поэтому любая подходящая схема нахождения корней регулярных функций должна быть пригодной для определения собственной частоты, т.е. такого значения ω ($\omega = \omega_0$), для которого $f(\omega) = 0$.

Метод Кастора [68] — это метод секущей, основанный на использовании значений ω_{k-1} и ω_k двух предыдущих итераций для получения нового значения ω_{k+1} , в предположении, что функция $f(\omega)$ линейна в окрестности ω_0 .

С помощью указанного метода, решая в каждой итерации систему (9.40), добиваются того, чтобы уравнение $f(\omega) = 0$ удовлетворялось с некоторой заданной точностью. (Конечно, все операции следует выполнять по правилам алгебры комплексных чисел.) Второе пробное значение ω , необходимое для этого метода, можно получить, например, посредством некоторого произвольного изменения первого пробного значения. Таким способом в конце концов определяют ω_0 — собственную частоту исследуемой моды, а также соответствующие собственные векторы \mathbf{X} и \mathbf{Y} .

Кастор указал на одну трудность в использовании этого метода. Он отметил, что функция $f(\omega)$ вблизи каждого нуля $\omega = \omega_0$ имеет полюс $\omega = \omega_p$. Этот полюс соответствует такому значению ω , при котором $\delta r_J = 0$. Поскольку все величины X_i и $Y_{i-1/2}$ обычно нормированы на значение $X_J = 1$, откуда следует, что при $\omega = \omega_p$ $Y_{i-1/2}/X_J = \infty$, $X_i/X_J = \infty$ ($i = 1, \dots, J-1$). Если $|\omega - \omega_0| > |\omega - \omega_p|$, то метод секущей либо не пригоден, либо дает очень медленную сходимость.

Рецепт Кастора для устранения этой трудности заключается в том, чтобы разделить $f(\omega)$ на такую произвольную функцию, которая имеет полюс, совпадающий с полюсом функции $f(\omega)$. В качестве такой функции он выбирает $X_1(\omega)$ и определяет

$$g(\omega) = f(\omega)/X_1(\omega). \quad (9.42)$$

Преимущество выбора X_1 в качестве этой произвольной функции состоит в том, что она не имеет нулей для любой из низших мод пульсаций. Далее Кастор предлагает использовать $g(\omega)$ вместо $f(\omega)$ в методе секущей. Такой прием улучшает сходимость и в то же самое время позволяет обойти трудность, связанную с существованием полюса. Дополнительные сведения можно найти в статье Кастора [68].

Наконец, мы попытаемся четко определить, что же подразумевается под термином «мода» в применении к линейным, но неадиабатическим пульсациям. Поскольку при таких пульсациях система никогда не проходит точно через свое равновесное состояние (разд. 9.1), узлов, характеризующих смещением $\xi = 0$, при неадиабатических пульсациях не существует. Следовательно, узлы нельзя использовать для характеристики мод (аналогичная до некоторой степени ситуация имеет место и в случае иерархических колебаний; см. гл. 17). Под термином «мода» мы будем подразумевать просто одно из собственных решений линейных неадиабатических уравнений. Если неадиабатические эффекты малы или, что приблизительно эквивалентно, если $|x/\sigma| \ll 1$ (эти условия уверенно выполняются в большинстве типов пульсирующих звезд; разд. 9.1), то, по-видимому, существует хорошо определенное взаимно однозначное соответствие между модами пульсаций в неадиабатическом и адиабатическом случаях, и в обоих классах задач имеется аналогичная упорядоченность мод. В случае неадиабатических пульсаций «узел» — это обычно сферическая поверхность, на которой $|\xi|$ достигает четкого минимума с очень малым значением и при переходе через которую фаза смещения ξ изменяется почти точно на π радиан. Как показывают расчеты, неадиабатические эффекты, если только они не чрезмерно велики, оказывают очень слабое влияние на положение узлов.

9.2 В. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ НЕАДИАБАТИЧЕСКИХ РАДИАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Здесь мы суммируем некоторые из основных свойств решений линейного неадиабатического волнового уравнения для «реалистичных» звездных моделей, лежащих в «области цефеид» на диаграмме Герцшпрунга — Рассела. Приводимые замечания основаны на моделях, в которых предполагается только лучистый перенос, даже если их параметры в некоторых случаях таковы, что, согласно современным представлениям, в их оболочках может возникать конвекция. Основным оправданием того, что мы ограничиваемся только лучистыми моделями, служит неудовлетворительное состояние наших знаний о конвекции в реальных звездах.

1. Неадиабатические периоды, по крайней мере в основной моде, обычно, по-видимому, короче соответствующих адиабатических периодов, но, как

правило, незначительно. Типичная разность составляет всего несколько десятых процента, однако в некоторых случаях при сравнительно большом отношении равновесной светимости к массе, она может достигать 2 — 3%. Вуд [628], исследуя гораздо более сильную неадиабатичность, нашел, что неадиабатические периоды иногда превышали адиабатические и что различие между ними часто было гораздо больше приведенных значений. При этом отмечены и другие интересные эффекты, связанные с собственными функциями. Аналогичные результаты были получены в работах [302, 303].

2. Поведение неадиабатической относительной амплитуды пульсаций $\xi(r)$ вдоль радиуса не очень отличается от соответствующей адиабатической относительной амплитуды $\xi_{ad}(r)$, по крайней мере в областях ниже зоны ионизации водорода. Следовательно, $\xi(r)$ (нормированное к единице на поверхности) почти вещественно, т.е. пульсации представляют собой почти стоячие волны. (Однако $\delta L/L$, и $\delta\rho/\rho$ приблизительно совпадают по фазе только в недрах. Около поверхности $\delta L/L$, может значительно отличаться по фазе от $\delta\rho/\rho$, что проявляется в существовании фазового запаздывания в поверхностных изменениях светимости; гл. 11.)

В лучистых моделях, попадающих в «область цефеид» на диаграмме Гершпрунга — Рессела, $\xi(r)$ обычно близко к единице; а в зоне ионизации водорода и выше нее может даже превысить единицу. Такое поведение — чисто неадиабатический эффект, связанный в конечном счете с тем, что для лучистых моделей $|dT_g/dr|$ в зоне ионизации водорода, как правило, очень велико (гл. 11). Ниже этой зоны $\xi(r)$ по мере продвижения вглубь быстро приближается к $\xi_{ad}(r)$.

3. С продвижением в недра пульсации быстро становятся адиабатическими. Это означает, что при рассмотрении все более глубоких слоев адиабатические соотношения (5.36) оказываются все более хорошим приближением.

9.3. Интегральные выражения для собственных значений

Итак, задачу о малых неадиабатических радиальных пульсациях можно точно решить только путем нахождения численных решений сложной задачи о собственных значениях для системы уравнений высокого порядка. Ясно, что эти решения зависят от принятого механизма переноса тепла. Однако довольно глубокого понимания общего поведения решения в зависимости от времени, а также ряда других особенностей можно достичь с помощью подхода, основанного на формальных интегральных выражениях для собственных значений. Эти интегральные выражения являются общими в том смысле, что они не связаны ни с какими явными предположениями о физической природе механизма переноса энергии. Однако, чтобы интегральные выражения давали точные численные результаты для собственных значений, функции, входящие в них, должны быть собственными функциями, а последние обычно не известны, пока не решена конкретная задача о собственных значениях. Тем не менее, как и в случае интегральных выражений, выведенных в разд. 8.8 для собственных значений адиабатических пульсаций, часто можно

получить вполне приемлемое приближение для неадиабатических собственных значений, используя вместо собственных функций приближенные пробные функции. Эти пробные функции, по существу, произвольные, но они должны быть достаточно регулярными. Однако, поскольку неадиабатическая задача не обладает свойством самосопряженности, такие интегральные выражения не удовлетворяют принципу экстремума в отличие от случая адиабатических пульсаций (разд. 8.10). Следовательно, чтобы интегральные выражения давали хорошее приближение для собственных значений, пробные функции должны быть как можно более точными. Использование интегральных выражений сыграло важную роль в развитии теории звездных пульсаций.

Подробные выводы интегральных выражений и их обсуждение содержатся, например, в работах [146, Ch. 27; 336], а также [5, 6, 144, 148, 156] (причем в пяти последних рассматривается применение интегральных выражений при отсутствии теплового равновесия; см. разд. 19.4), поэтому здесь мы ограничимся только кратким изложением.

Рассматриваемые интегральные выражения основаны на линейном неадиабатическом волновом уравнении, одной из форм которого является уравнение (7.15). Зависимость всех вариаций от времени принимается такой же, как в уравнениях (9.8) и (9.9). Далее, линейное неадиабатическое волновое уравнение умножают на $\xi^* r^2 dm$ (где звездочка обозначает комплексно сопряженную величину), а затем интегрируют по полной массе звезды. В результате получают уравнение третьего порядка

$$i\omega(\omega^2 - \Sigma^2) = C/J, \quad (9.43)$$

решения которого и дают искомые интегральные выражения для собственного значения ω . Здесь J — осцилляторный момент инерции звезды для рассматриваемой моды [см. выражение (8.26)]. Величина Σ^2 определяется следующим соотношением:

$$\begin{aligned} \Sigma^2 J &= \int_M \xi^* \mathcal{L}(\xi) r^2 dm = \\ &= \int_M \{ 16\pi^2 \Gamma_1 P \rho^6 |d\xi/dm|^2 - 4\pi r^3 |\xi|^2 d[(3\Gamma_1 - 4)P]/dm \} dm, \end{aligned} \quad (9.44)$$

где во втором равенстве использовано предположение, что давление P обращается в нуль на поверхности, т.е. при $m = M$; \mathcal{L} — линейный оператор, определенный выражением (8.23). Наконец, если на поверхности $\delta(\epsilon - \partial L/\partial m)_{sp} = 0$, то имеем следующее выражение для C :

$$C = \int_M (\Gamma_3 - 1)(\delta\rho/\rho)_{sp}^* \delta(\epsilon - \partial L/\partial m)_{sp} dm = C_r + iC_i, \quad (9.45)$$

причем C_r и C_i вещественны. Сравнение выражения (9.45) с (9.3), (9.10) и (9.11) показывает, что вещественная часть C_r величины C пропорциональна $\langle dW/dt \rangle$, т.е. скорости (усредненной по периоду), с которой сила гравитации

и силы, обусловленные наличием градиента давления, совершают работу над всей звездой. Как указывалось, C_I в основном влияет на период пульсаций (см. ниже).

Рассмотрим теперь решение уравнения (9.43). В общем случае оно имеет три корня. Один из них, скажем ω_1 , обычно очень мал и можно показать (см., например, [146, Ch. 27]), что он связан с проблемой вековой неустойчивости звезд; для нас этот корень сейчас не представляет непосредственного интереса. При изучении пульсирующих звезд намного более интересны оба больших корня, скажем $i\omega_2$ и $i\omega_3$. Оба эти решения определяются следующим выражением, в котором выделены вещественная и мнимая части (см., например, [146, Ch. 27]):

$$i\omega_{2,3} = i[\pm \Sigma + \frac{1}{2}C/(\Sigma^2 J) \pm \frac{3}{4}(C_r^2 - C_i^2)/(\Sigma^5 J^2)] + \\ + [\frac{1}{2}C/(\Sigma^2 J) \mp \frac{1}{4}C_r C_i/(\Sigma^5 J^2)] + O(\delta^3), \quad (9.46)$$

где $\delta = |C/J\Sigma^3| \sim t_{ff}/t_K \ll 1$, [что и использовано в (9.46)], а C_r и C_i — вещественная и мнимая части C [см. формулу (9.45)]. Каждый из корней в (9.46) содержит либо все верхние, либо все нижние знаки. По модулю оба эти корня равны; они описывают один и тот же вид физических движений в звезде (как впервые отметил Ибен [281]; см. также [356]). Две последовательности знаков в (9.46) просто соответствуют корню $i\omega$ и его комплексно сопряженному значению $(i\omega)^*$. Можно показать, что если в дифференциальных уравнениях заменить $(i\omega)$ на $(i\omega)^*$, то все пульсационные переменные следует заменить их комплексно сопряженными значениями. Такая замена приводит к изменению знака C_r . Тогда, очевидно, $i\omega_3 = (i\omega_2)^*$, т.е. оба корня соответствуют одному и тому же физическому поведению звезды.

Уравнение (9.46) описывает колебательное движение с периодом $\Pi = 2\pi/\omega$, где $\omega \approx \sigma$ (σ — адиабатическая угловая частота пульсаций). Если $\delta \ll 1$, то амплитуда этого движения либо медленно растет со временем, либо медленно затухает в соответствии с выражением (9.14). Согласно уравнению (9.46), коэффициент устойчивости χ (разд. 9.1) с точностью до первого порядка относительно δ определяется соотношением (9.13). Ясно, что C_i сильнее всего влияет на период пульсаций модели, как и было указано выше.

9.4. Оценка коэффициента устойчивости Эддингтоном

Эддингтон [197, Ch. 8] был, вероятно, первым, кто вывел выражение для коэффициента устойчивости χ (разд. 9.1). Его вывод основывался на остроумном анализе с использованием энтропии, и он рассматривал только термодинамически обратимый случай в линейной теории. Мы кратко изложим вывод Эддингтона и одновременно обобщим его на нелинейный необратимый случай, что, оказывается, легко сделать.

Эддингтон прежде всего принял, что коэффициент устойчивости определяется выражением

$$\chi = -\frac{1}{2} \langle d(\delta\Psi)/dt \rangle / \langle \delta\Psi \rangle, \quad (9.47)$$

где $\delta\psi$ — полная энергия пульсаций, которая будет определена ниже (в общем случае эта величина не совпадает с $\delta\psi$ из разд 9.1), а угловые скобки означают усреднение по полному периоду P . Затем Эддингтон оценил числитель этого выражения, используя теорему энергии в форме (4.52).

Применим эту теорему как к пульсирующему, так и к неппульсирующему состоянию звезды, обозначая последнее состояние индексом 0 и считая его состоянием полного равновесия (разд. 5.2). Вычитая одно уравнение из другого, получим выражение для $d\delta\psi/dt$, где полная энергия пульсаций определяется следующим нелинейным выражением:

$$\delta\psi = \int_M [v^2/2 - (Gm/r - GM/r_0) + (E - E_0)] dm. \quad (9.48)$$

Числитель уравнения (9.47) получают затем из соотношения

$$P \langle d(\delta\psi)/dt \rangle = \int_M dm \oint (dq/dt) dt, \quad (9.49)$$

где интегрирование по времени следует проводить по полному замкнутому циклу колебаний. Требуя, чтобы цикл был замкнутым, мы интерпретируем левую часть уравнения (9.49) как количество энергии, которое в течение одного периода отводится от звезды или добавляется к звезде при строго периодическом движении. Можно показать, что такая интерпретация согласуется с результатами и выводами предыдущих разделов данной главы, если характерное время затухания $|x|^{-1}$ велико по сравнению с периодом P .

Эддингтон хотел оценить интегралы в правой части уравнения (9.49), используя величины только первого порядка, известные из некоторого приближенного решения линеаризованных уравнений. Однако это решение требует, чтобы величина dq/dt менялась синусоидально со временем. Если это условие выполняется, то очевидно, что интеграл по замкнутому циклу в уравнении (9.49) обращается в нуль. Поэтому Эддингтон стремился найти метод, который давал бы значение интеграла по циклу колебаний с точностью до второго порядка, но с помощью величин, известных с точностью только до первого порядка.

Он принял во внимание следующее обстоятельство, связанное с энтропией (мы обобщим этот подход на необратимый случай). Если предполагается, что в конце периода звезда точно возвращается в исходное состояние, то ясно, что для каждого элемента массы результирующее изменение ds его удельной энтропии s за период будет равно нулю. Величина ds определяется общим термодинамическим соотношением

$$ds = dq/T + d\sigma, \quad (9.50)$$

где dq — результирующее приращение количества тепла на единицу массы, T — мгновенное значение температуры, а $d\sigma$ — изменение удельной энтропии, обусловленное только необратимыми процессами, такими, как вязкость. Согласно второму началу термодинамики, всегда $d\sigma \geq 0$. Кроме того, можно записать следующее тождество:

$$1/T = 1/T_0 - (T - T_0)/TT_0. \quad (9.51)$$

где T_0 — произвольная фиксированная температура, в качестве которой можно принять, если удобно, равновесную температуру элемента массы. Подставляя это тождество в уравнение (9.50), интегрируя по замкнутому циклу и приравнявая интеграл от ds нулю, получаем для уравнения (9.49)

$$\oint_M \langle d(\delta\Psi)/dt \rangle = \oint_M dm \oint [(T - T_0)/T](dq/dt)dt - \oint dm T_0 \oint (d\sigma/dt)dt. \quad (9.52)$$

Это и есть искомое обобщение результата Эддингтона на нелинейный необратимый случай. Отметим, что, согласно этому уравнению, необратимые процессы всегда стремятся подавить пульсации, как и следовало ожидать. (См., например, [146, Ch. 27], где выполнено альтернативное рассмотрение эффектов вязкости.)

В линейном и обратимом случае (когда $[T - T_0]/T = \delta T/T$, а $d\sigma = 0$) уравнение (9.52) принимает вид

$$\oint_M \langle d(\delta\Psi)/dt \rangle = \oint_M dm \oint (\delta T/T) \delta(\epsilon - \partial L/\partial m)dt. \quad (9.53)$$

Это и есть результат Эддингтона.

Леду [335, §13] дал еще один вывод подобных выражений, который также приводит к формуле Эддингтона.

Легко показать, что уравнение (9.53) точно соответствует нашим результатам, полученным в предыдущих разделах этой главы при непосредственном вычислении работы, совершаемой в течение цикла пульсаций силой гравитации и силами, обусловленными наличием градиента давления, в предположении, что этот цикл замкнутый.

ГЛАВА 10 ПУЛЬСАЦИОННАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕАЛЬНЫХ ЗВЕЗД

В гл. 9 мы с весьма общей точки зрения рассмотрели влияние неадиабатичности на радиальные пульсации звезд, а также термодинамические условия, которые приводят к звездным пульсациям. В результате выявился довольно очевидный факт: чтобы звезда была пульсационно неустойчивой, общее воздействие всех областей возбуждения пульсаций должно превышать в ней воздействие областей затухания. Эти выводы хорошо известны по меньшей мере с конца 30-х — начала 40-х годов, когда Эддингтон провел свои основополагающие исследования происхождения звездных пульсаций. Однако лишь в последние 15 — 20 лет удалось выявить механизмы, ответственные за пульсации большинства видов переменных звезд. Теперь можно уверенно сказать, что мы довольно хорошо понимаем действие этих механизмов и, следовательно, знаем причины пульсаций обычных типов переменных звезд. Хотя нужно уяснить еще много деталей, общая картина в основных чертах, по-видимому, верна.

В большинстве случаев эти механизмы связаны с ионизацией элемента с

высоким содержанием, такого, как водород или гелий, в оболочке звезды, на некоторой критической глубине под ее поверхностью. Точнее, главным фактором, ответственным за пульсации наиболее известных типов переменных звезд, является, вероятно, частичная ионизация He^+ ($\text{He}^+ \rightleftharpoons \text{He}^{++}$, вторая ионизация гелия). Связь между содержанием гелия и неустойчивостью рассмотрена в работе [125]; см. разд. 10.3. Однако довольно значительный вклад в возникновение неустойчивости вносит и ионизация водорода, которая, возможно, является даже главной причиной неустойчивости красных переменных звезд. По современным представлениям, именно ионизацией водорода обусловлено в основном фазовое запаздывание изменений блеска пульсирующих звезд (гл. 11).

Термоядерные реакции, которые служат основным источником энергии на протяжении большей части жизни звезды, вероятно, играют незначительную роль в пульсациях самых известных типов переменных звезд, поскольку пульсации происходят в основном в оболочке звезды. Они практически не затрагивают более глубоких областей, где протекают термоядерные реакции, и поэтому прямое влияние последних пренебрежимо мало.

Эффекты обычной вязкости (молекулярной и лучистой), как установлено для случая радиальных пульсаций, также незначительны (см., например, [146, Ch. 27]).

В этой главе мы ограничимся кратким изложением основных идей, поскольку рассматриваемая тема довольно подробно обсуждена в различных обзорных статьях (например, [133]), где и можно найти дополнительные сведения.

Исследуя пульсации звезд типа δ Щита и β Цефея, Стеллингверф [549, 550] ввел новый вид механизма возбуждения в оболочке, который подробно обсуждается в разд. 10.1 и в гл. 13 (см. также [147, 152, 474, 475]).

В разд. 10.1 мы суммируем те важные принципы, на которых основано действие механизмов, связанных с ионизацией вещества в оболочке. Разд. 10.2 содержит краткий исторический очерк основных достижений, приведших к современным представлениям о звездных пульсациях. И наконец, в разд. 10.3 рассмотрено необходимое условие пульсационной неустойчивости, возникающей под действием механизмов, связанных с ионизацией вещества в оболочке.

10.1. Механизмы возбуждения пульсаций, связанные с ионизацией вещества в оболочке звезды

Действие механизмов возбуждения пульсаций, связанных с ионизацией вещества в оболочке звезды, обусловлено главным образом тем, что ионизация компонента звездного вещества с высоким содержанием может приводить к модуляции изменений потока энергии. Как отмечалось в гл. 9, модуляция должна быть такой, чтобы пульсирующие области накапливали, или поглощали, тепло в фазе наибольшего сжатия и теряли его в фазе наибольшего расширения. В этом случае давление в соответствующих областях звезды будет достигать максимума после максимума плотности. Тогда любые зарождающи-

еся пульсации будут усиливаться, т.е. будет иметь место эффект дестабилизации. Детальное рассмотрение показывает, что в тех областях, где элемент с высоким содержанием примерно наполовину ионизован, фазовые соотношения между изменениями потока и плотности могут быть именно такими, как описано выше. Кроме того, эти области частичной ионизации расположены во внешних слоях звезды, где пульсации имеют значительную амплитуду. Во внутренних же областях эффект обычно в точности противоположен описанному, поэтому здесь существует тенденция к подавлению любых зарождающихся пульсаций. Однако в этих внутренних областях амплитуда пульсаций относительно мала, так что эффект затухания ослаблен. Как показывают детальные расчеты, при подходящих условиях (см. ниже) эффекты возбуждения могут превысить эффекты затухания, и звезда может стать неустойчивой. Более того, объекты, в которых имеет место эта неустойчивость, должны располагаться именно в той части диаграммы Герцшпрунга — Рессела, где находятся основные типы переменных звезд.

Эффекты модуляции изменений потока можно выразить количественно, если записать интеграл работы (гл. 9) в следующем приближенном виде:

$$C \approx -L \int_M (\Gamma_3 - 1) (\delta\rho/\rho) [d(\delta L_r/L_r)/dm] dm, \quad (10.1)$$

где вариации $\delta\rho$ и δL_r — это только пространственные части соответствующих величин. В этом выражении мы пренебрегли источниками термоядерной энергии и приняли, что равновесное значение L_r постоянно по всей звезде и равно полной равновесной светимости L . Кроме того, мы предположили (а если не оговорено особо, то будем предполагать всюду в данном разделе), что величина $\delta\rho/\rho$ вещественна и положительна во всех интересующих нас областях. Физически это означает, что когда радиус звезды минимален, рассматриваемые области находятся в сжатом состоянии. Для пульсаций в основной моде такая ситуация будет существовать приблизительно по всей звезде, а для более высоких гармоник — в области, внешней по отношению к самому близкому к поверхности узлу колебаний. Только такие самые внешние области и заслуживают внимания при рассмотрении высоких гармоник, поскольку в слоях глубже самого внешнего узла амплитуда пульсаций обычно очень мала (п. 8.12в).

Для большинства звезд обычно $d(\delta L_r/L_r)/dm > 0$ во всей важной для рассматриваемой проблемы области. А тогда в соответствии с уравнением (10.1) $C < 0$, т.е. звезда пульсационно устойчива. В данном случае в момент, когда радиус минимален, изменения светимости всюду возрастают наружу. Поэтому в единицу времени через внешнюю границу каждого элементарного сферического слоя вещества вытекает большее количество тепла, чем поступает в слой через его внутреннюю границу, т.е. в этот момент каждый слой вещества теряет тепло. Тогда в соответствии с изложенным в гл. 9 каждый слой способствует затуханию. Следовательно, пульсации звезды являются затухающими. Такой вид затухания часто называют «затуханием вследствие излучения», хотя этот термин не следует относить только к лучистому пере-

носу, поскольку L_r — это локальная светимость, обусловленная всеми возможными механизмами переноса энергии.

Такое поведение светимости связано в основном с изменениями непрозрачности. Обычно при сжатии непрозрачность уменьшается, т.е. вещество становится более прозрачным, и это значительно усиливает потери тепла. Однако, как отметил Эддингтон [197, Ch. 8], некоторая утечка тепла происходила бы даже в том случае, если бы непрозрачность во время пульсаций оставалась постоянной при условии, что $\Gamma_1 \approx 1/2$. Последний результат обусловлен главным образом тем, что изменение локальной светимости пропорционально довольно высокой степени температуры ($\propto T^4$), а температура при сжатии обычно повышается. Видно, что в этом случае быстрое возрастание $\delta\rho/\rho$ наружу сильно способствует затуханию пульсаций. Приведенные соображения показывают, что без некоторого эффективного дестабилизирующего механизма большинство звезд и, в частности, гиганты и сверхгиганты должны быть чрезвычайно устойчивы относительно пульсаций, как и следует из расчетов [128, 343, 448]. В определенном смысле этот результат является удовлетворительным: он согласуется с тем фактом, что пульсации звезд — очень редкое явление (гл. 1).

Рассмотрим теперь, как влияют на изменения светимости зоны ионизации водорода H, нейтрального гелия He^0 и однократно ионизованного гелия He^+ , расположенные во внешних слоях звезд. Для звезд с обычным химическим составом, в которых преобладают водород и гелий, только эти зоны ионизации и следует учитывать. Однако излагаемые идеи применимы в принципе к любому элементу с достаточно высоким содержанием. Кроме того, здесь мы рассмотрим только лучистый перенос, хотя вещество в окрестности таких зон ионизации обычно конвективно неустойчиво.

В равновесном состоянии середина зоны ионизации He^+ всегда почти независимо от основных параметров звезды имеет температуру около $4 \cdot 10^4$ K (что соответствует потенциалу ионизации 54,4 эВ). Зоны ионизации H и He^0 в звезде обычно так близки друг к другу, что оказываемое ими влияние почти эквивалентно влиянию одной зоны, средняя часть которой имеет температуру от 10^4 до $1,5 \cdot 10^4$ K, также почти не зависящую от основных параметров звезды. Поскольку в поведении данной зоны преобладают эффекты ионизации водорода, ее обычно называют просто зоной ионизации водорода.

Для рассматриваемой проблемы наиболее важное влияние подобной зоны ионизации на свойства вещества заключается в том, что в ней $\Gamma_3 - 1$ довольно мало. В этом случае большая часть работы адиабатического сжатия переходит в энергию ионизации, а не в кинетическую энергию теплового движения, поэтому при сжатии температура возрастает не очень сильно. Малые значения $\Gamma_3 - 1$ в зоне ионизации оказывают очень сильное влияние на квази-адиабатические изменения светимости $(\delta L/L)_a$, которые очень чувствительны к значениям $\Gamma_3 - 1$. Общий эффект состоит в том, что $(\delta L/L)_a$ претерпевает в зоне ионизации заметное уменьшение, сравнимое или даже превышающее само значение $(\delta L/L)_a$.

Сильное уменьшение $(\delta L/L)_a$ в направлении от центра во внутренних частях зоны ионизации вследствие уменьшения $\Gamma_3 - 1$ ясно показывает (по

крайней мере, если $(\delta L/L)_a \approx \delta L/L_a$, что в этой области в момент максимального сжатия звезды имеет место поглощение энергии. Следовательно, данная область представляет собой область возбуждения (гл. 9).

С физической точки зрения малые значения $(\delta L/L)_a$ в области малых $\Gamma_3 - 1$ отчасти являются прямым следствием более слабых изменений температуры в этой области (т.е. меньших значений $\delta T/T$). Причиной здесь в том, что для заданной непрозрачности κ светимость $L_r \propto T^4$. Следовательно, при сжатии поток излучения в рассматриваемой области возрастает меньше, чем в других частях звезды. Таким образом, в области, где $\Gamma_3 - 1$ убывает, поток излучения в момент наибольшего сжатия задерживается и поглощается веществом. Это поглощение энергии увеличивает темп локального возрастания температуры и приводит к тому, что во время последующего расширения температура, а следовательно, и давление оказываются несколько выше, чем в случае адиабатического движения. Как показано в разд. 9.1, наличие избыток давления в фазе расширения обеспечивает преобразование некоторого количества поглощенного при сжатии тепла в механическую работу и тем самым в энергию пульсаций. Прямое влияние изменений температуры на изменение светимости получило название « γ -механизма» [143].

Если закон непрозрачности имеет вид $\kappa \propto \rho^n T^{-s}$ (n и $s > 0$), то ясно, что малые значения $\delta T/T$ в тех областях, где значения $\Gamma_3 - 1$ малы, могут приводить к возрастанию κ при сжатии, тогда как обычно κ при сжатии уменьшается (см. выше). Локальный рост κ при сжатии усиливает задержку потока излучения в области, где $\Gamma_3 - 1$ убывает в направлении от центра, и еще более способствует раскачке пульсаций в данной области. Это прямое воздействие изменений непрозрачности на изменения светимости Бейкер и Киппехан [36] называли « κ -механизмом».

Отметим, что если s велико и отрицательно (а это, по-видимому, имеет место в зоне ионизации водорода), то поглощение излучения, а следовательно, и возбуждение пульсаций могут происходить даже в том случае, когда Γ_3 близко к своему обычному значению $5/3$. Как показал Стеллингверф [549, 550] в своих расчетах пульсационной устойчивости моделей звезд типа δ Цента и β Цефея, иногда этот факт оказывается важным. В частности, при температуре около $1,5 \cdot 10^5$ К, при которой энергия фотонов в максимуме спектрального распределения энергии излучения близка к потенциалу второй ионизации гелия (54,4 эВ), отмечается некоторое увеличение непрозрачности. Вблизи этой температуры показатель s имеет более низкую абсолютную величину чем обычно, что и создает раскачивающий эффект. Стеллингверф назвал этот эффект «механизмом скачка непрозрачности».

Вернемся теперь к рассмотрению зоны ионизации элемента с высоким содержанием во внешних слоях. Зоны ионизации в звездах, как правило, довольно тонкие (по крайней мере, судя по изменениям равновесной температуры T), и $\Gamma_3 - 1$ быстро возрастает наружу во внешних частях такой зоны, где степень ионизации очень мала. (Минимум $\Gamma_3 - 1$ имеет место при температуре, соответствующей 50%-ной ионизации элемента.)

Аргументы, подобные изложенным выше, приводят к заключению, что величина $(\delta L/L)_a$ должна быстро возрастать наружу во внешних слоях зоны

ионизации (после столь же быстрого ее уменьшения во внутренних слоях), поэтому ее значения непосредственно выше и ниже этой зоны не очень сильно различаются между собой. Следовательно, если бы выполнялось соотношение $\delta L/L_r \approx (\delta L/L_r)_a$, то можно было бы ожидать, что сильное затухание во внешних частях зоны ионизации будет в значительной степени компенсировать сильное возбуждение во внутренних частях, и поэтому результирующее влияние зоны ионизации на устойчивость звезды будет малым или даже пренебрежимо малым. Однако из-за неадиабатических эффектов $\delta L/L_r$ и $(\delta L/L_r)_a$ могут весьма сильно различаться между собой в слоях, лежащих достаточно далеко от центра звезды. Именно отсутствие равенства этих двух величин (неадиабатический эффект) создает в звездах условия для возникновения пульсационной неустойчивости под действием механизмов, связанных с ионизацией вещества в оболочке.

Проще всего эти важные неадиабатические эффекты можно рассмотреть на примере переходной области, отделяющей квазиадиабатические недра от неадиабатических внешних слоев. В квазиадиабатических недрах справедливо квазиадиабатическое приближение, характеризуемое, например, соотношением $\delta T/T = (\Gamma_3 - 1)\delta\rho/\rho$, и там выполняется приближенное равенство $\delta L/L_r \approx (\delta L/L_r)_a$. С другой стороны, в неадиабатической внешней области вариации светимости фактически неизменны в пространстве, т.е. $(\delta L/L_r)_{sp} \approx \text{const}$ (гл. 9), и практически никак не связаны с квазиадиабатическими изменениями светимости. (Следует, однако, отметить, что величина $(\delta L/L_r)_{sp}$ не строго постоянна в слоях выше переходной области, поскольку она может испытывать некоторое изменение в расположенной над этой областью зоне ионизации водорода; см. гл. 11.) Рассмотрение переходной области как отдельного слоя нулевой толщины является до некоторой степени чрезмерным упрощением, в действительности переходная область довольно протяженная.

С помощью уравнения энергии можно показать (см., например, [146, Ch. 27]), что положение переходной области в звездной оболочке определяется по порядку величины приближенным соотношением

$$\langle c_V T_{TR} \rangle (\Delta m)_{TR} / L\Pi \sim 1, \quad (10.2)$$

где L — равновесная светимость звезды, а Π — период пульсаций в рассматриваемой моде. Числитель приближенно равен полной внутренней энергии слоев, лежащих над переходной областью и имеющих массу $(\Delta m)_{TR} = M - m_{TR}$. Здесь T и c_V — соответственно локальные значения температуры и теплоемкости на единицу массы при постоянном объеме в равновесной модели. Таким образом, переходная область определяет тот уровень, выше которого полная внутренняя энергия вещества по порядку величины равна полной энергии, излученной звездой в течение периода пульсаций. Отметим, что определение переходной области не предполагает никаких конкретных механизмов переноса энергии.

Для заданной равновесной модели звездной оболочки можно рассчитать зависимость $(\Delta m)_{TR}$ или T_{TR} (равновесной температуры в переходной области) от основных параметров звезды (такой расчет для упрощенной модели

оболочки представлеи в ([146, Ch. 27]), из этих расчетов стайовятся очевидными два обстоятельства:

1. Положение переходной области в оболочке довольно сильно зависит от равновесного радиуса R и лишь слабо зависит от других параметров звезды, таких, как масса M и светимость L . Можно показать, что для лучистых моделей оболочек с одинаковыми светимостью L , массой M , химическим составом и для заданной моды пульсаций $T_{\text{TR}} \propto R^{-1/2}$, а $(\Delta m)_{\text{TR}} \propto R^2$. Следовательно, температура T_{TR} относительно велика в звездах с малым радиусом R и убывает при увеличении R . Другими словами, при увеличении радиуса переходная область перемещается по массовой координате наружу (см. ниже).

2. Оказывается, что для звезд в полосе неустойчивости на диаграмме Гершпрунга — Рессела (рис. 3.1, на котором эта полоса изображена в виде узкой овальной области) $T_{\text{TR}} \approx 4 \cdot 10^4$ K, т.е. очень близка к температуре в зоне второй ионизации гелия. Это приближенное равенство двух температур наводит на мысль, что полоса неустойчивости соответствует приближенному совпадению переходной области и зоны второй ионизации гелия в звездной оболочке. Как показывают последующие рассуждения, такое совпадение является следствием взаимодействия неадиабатических эффектов с зонами ионизации.

Основные эффекты неадиабатичности во внешних слоях звезд состоят в нарушении приближенного равенства между действительными и квазиадиабатическими изменениями светимости $\delta L/L_r$ и $(\delta L/L_r)_a$ во внешних по отношению к переходной зоне областях. В этих областях изменения плотности и температуры подстраиваются друг к другу таким образом, что величина $\delta L/L_r$ остается приблизительно постоянной в пространстве. Поскольку степень ионизации сильно зависит от температуры, в зонах ионизации водорода и второй ионизации гелия температуры приблизительно постоянны и почти не зависят от основных параметров звезды. Поэтому можно рассмотреть звезду с заданными массой M , светимостью L и химическим составом, считая при этом равновесный радиус R свободным параметром. Такой подход позволяет приблизительно воспроизвести теоретическую эволюцию некоторых реальных звезд, когда они пересекают полосу неустойчивости.

Если радиус R настолько мал, что обе зоны ионизации лежат выше переходной области, то пространственные вариации светимости фактически неизменны, и поэтому величина $\delta L/L_r$ (вещественная часть величины $(\delta L/L_r)_{sp}$) здесь приблизительно постоянна, несмотря на заметное уменьшение $(\delta L/L_r)_a$ в этой области. Таким образом, $\delta L/L_r$ положительна и монотонно возрастает наружу до тех пор, пока не достигается переходная область, а выше ее остается по существу постоянной. Поэтому в оболочке происходит только затухание, и звезда устойчива.

Рассмотрим теперь случай несколько большего радиуса R . Поскольку температура T_{TR} с увеличением R уменьшается, а температуры в зонах ионизации приблизительно постоянны, существует критическое значение радиуса R_{crit} , при котором зона второй ионизации гелия (т.е. более глубокая из двух зон) приблизительно совпадает с переходной областью. В таком случае зона ионизации, по сути дела, разделяется на две части: квазиадиабатическую

внутреннюю часть и неадиабатические внешние слои. Внутренняя часть зоны ионизации лежит по существу в квазиадиабатических недрах, где $\delta L/L_r \approx (\delta L/L_r)_a$ и где уменьшение $\Gamma_3 \rightarrow 1$ наружу приводит к сильному уменьшению в этом же направлении $(\delta L/L_r)_a$, а потому и $\delta L/L_r$. Внешние части зоны ионизации, напротив, лежат по существу в неадиабатической области, где $\delta L/L_r$ мало и имеет всюду такое же значение как вблизи середины этой зоны. Следовательно, благодаря неадиабатическим эффектам сильного затухания во внешних частях зоны второй ионизации гелия теперь не происходит. Зона же ионизации водорода по-прежнему лежит в неадиабатической внешней области и поэтому оказывает лишь слабое влияние. Итак, сильное возбуждение, обусловленное тем, что во внутренних частях зоны второй ионизации гелия $\delta L/L_r$ быстро убывает наружу, теперь оказывается эффективным, и поэтому звезда может быть неустойчивой. Быстрый рост $\delta\rho/\rho$ наружу еще больше способствует возбуждению пульсаций в зоне второй ионизации гелия и выше нее по сравнению с затуханием в более глубоких областях [см., например, уравнение (10.1)]. Следовательно, этот рост $\delta\rho/\rho$ наружу, обычно оказывающий сильное стабилизирующее влияние, теперь усиливает неустойчивость. Таким образом, если бы имела только зона второй ионизации гелия, то случай $R = R_{\text{crit}}$ соответствовал бы максимальной неустойчивости при заданных светимости L , массе M и химическом составе. Низкотемпературная граница области неустойчивости, соответствующая $R > R_{\text{crit}}$, будет рассмотрена ниже.

Детальные расчеты подтверждают (см., например, [36]), что в случае $R = R_{\text{crit}}$ возбуждение во внешних областях оболочки действительно может превысить затухание в недрах, и поэтому звезда может стать неустойчивой.

Представленные соображения позволяют объяснить уже упоминавшийся факт, что для звезд, лежащих в полосе неустойчивости на рис. 3.1, температура T_{TR} в переходной области близка к температуре в зоне второй ионизации гелия ($4 \cdot 10^4$ К). Условие, что переходная область и зона второй ионизации гелия приблизительно совпадают, может дать приближенное необходимое условие неустойчивости, обусловленной рассматриваемыми здесь механизмами (разд. 10.3).

Из наблюдений следует, что полоса неустойчивости цефеид довольно резко ограничена со стороны низких температур. При фиксированной средней светимости ширина полосы составляет $\Delta \lg T_e \approx 0,05 - 0,08$ (здесь T_e — эффективная температура), что соответствует $\Delta T_e \approx 600 - 1100$ К. К сожалению, рассматриваемые механизмы, связанные с ионизацией вещества в оболочке, которые могут объяснить высокотемпературную границу области неустойчивости, не способны на основе одного только лучистого переноса объяснить восстановление устойчивости при низких температурах. И действительно, детальные расчеты, как линейные, так и нелинейные (см., например, [300]), показывают, что при постоянной средней светимости неустойчивость в основной моде с понижением T_e продолжает усиливаться.

Такое нарастание неустойчивости в основной моде при увеличении радиуса R в значительной мере связано, вероятно, с зоной ионизации водорода, которая потенциально является областью очень сильного возбуждения (см. выше)

и при возрастании радиуса R перемещается в звезде в направлении сближения с переходной областью.

Однако хорошо известно, что современные теории конвекции предсказывают возникновение эффективного конвективного переноса энергии во внешних слоях звезд с T_e , которые несколько ниже температур на «голубой» (т.е. высокотемпературной) границе области неустойчивости. Поэтому, как впервые предположили Бейкер и Киппенхан [37], представляется почти несомненным, что именно эффективный конвективный перенос приводит к восстановлению устойчивости при низких эффективных температурах и тем самым определяет положение «красной» (т.е. низкотемпературной) границы полосы неустойчивости цефеид. Однако из-за отсутствия надежной теории неустановившейся конвекции (разд. 4.3 и 19.3) точные механизмы этого предполагаемого стабилизирующего воздействия еще очень плохо поняты.

К настоящему времени, вероятно, наиболее целенаправленные попытки для решения этой проблемы предпринял Дюпри [173 — 182]. Его исследования довольно подробно описываются в разд. 19.3, где с физической точки зрения обсуждается, каким образом конвекция может подавлять неустойчивость на «красной» границе полосы неустойчивости. Бейкеру и Гафу в их теоретической работе [34] также удалось определить положение «красной» границы полосы неустойчивости цефеид.

10.2. Краткий исторический очерк

Первым, кто внимательно исследовал проблему поддержания пульсаций и связанные с ней вопросы диссипации пульсационной энергии, был, по-видимому, Эддингтон [197]. Он получил выражение для полной диссипации пульсационной энергии в случае малых радиальных колебаний; это выражение и его вывод были приведены в разд. 9.4. Эддингтон использовал данное выражение для определения характерного времени τ_d затухания пульсаций в модели δ Цефея. Предполагая, что равновесная модель может быть представлена полнотропой с показателем $n = 3$ (стандартная модель Эддингтона), он получил $\tau_d \approx 8000$ лет. Поскольку это значение невелико по сравнению с характерным временем эволюции, вероятность наблюдения пульсаций такой звезды пренебрежимо мала. Последующие расчеты, основанные на более реалистичных моделях, показали, что τ_d еще в тысячу с лишним раз меньше оценки, полученной Эддингтоном. Эти результаты подчеркнули необходимость нахождения сильного и активного дестабилизирующего механизма поддержания пульсаций.

Эддингтон, несомненно, полагал, что основную роль в возбуждении пульсаций цефеид играют термоядерные реакции вблизи центра звезды. Однако он рассмотрел и другой возможный механизм возбуждения пульсаций, не связанный непосредственно с ядерными реакциями. Как мы видели выше в настоящей главе, принцип работы этого механизма служит основой современных представлений о причинах большинства звездных пульсаций. Эддингтон называл этот механизм разновидностью клапанного механизма; его действие основано на модуляции потока тепла при прохождении слоев звезд-

ного вещества (см. выше). Эддингтон сравнивал свой клапанный механизм с термодинамической тепловой машиной, хотя, быть может, и довольно необычного по земным стандартам вида. Этот механизм обеспечивал желаемый эффект посредством изменения оттока тепла, тогда как в двигателе внутреннего сгорания изменяется поступление тепла. Если бы, например, в элементе вещества при сжатии отток тепла уменьшался, а при расширении увеличивался, то этот элемент способствовал бы возбуждению пульсаций (разд. 9.1).

В своих последних работах о причине неустойчивости пульсирующих звезд Эддингтон [199, 200] высказал предположение, что клапанный механизм действует в зоне ионизации водорода во внешних слоях звезд. По-видимому, он все еще полагал, что основной возбуждающий эффект обусловлен ядерными реакциями вблизи звездного центра, а клапанный механизм служит лишь для уменьшения диссипации энергии во внешних областях до такой степени, чтобы возбуждение под действием ядерных реакций преобладало над диссипацией и тем самым обеспечивало неустойчивость звезды.

Следующим важным шагом явилось выполненное Эпштейном [204] исследование решений линейного адиабатического волнового уравнения для моделей с сильной концентрацией вещества к центру (разд. 8.13). Амплитуды пульсаций в центральных областях таких моделей оказались приблизительно в 10^6 раз меньше, чем на поверхности. Основываясь на решениях Эпштейна, Кокс [128] провел затем детальный квазиадиабатический анализ устойчивости одной из этих моделей и нашел, что затухание вследствие излучения на много порядков превышает возбуждение, вызываемое ядерными реакциями. В результате был сделан общий вывод, что во внутренней области звезды, охватывающей около 0,85 звездного радиуса, не может быть никаких эффективных или важных источников неустойчивости, и поэтому механизм возбуждения пульсаций независимо от его природы должен находиться выше этой области. Подобные выводы были получены и в работах [343, 448].

Эти результаты заставили исследователей, пытавшихся определить положение источника неустойчивости в звезде, обратиться к внешним неадиабатическим областям (см., например, [129]). Почти одновременно с описанными исследованиями Жсвакин [636 — 638] высказал предположение, что подходящим местом для работы клапанного механизма, рассмотренного Эддингтоном, может быть область второй ионизации гелия ($\text{He}^+ \rightleftharpoons \text{He}^{++}$). Аналогичное предположение было сделано Коксом и Уитни [153]. В свете результатов, описанных в предыдущем разделе, возникновение неустойчивости обычно должно быть не частично, а целиком обусловлено действием клапанного механизма. Эффективность зоны второй ионизации гелия как механизма возбуждения пульсаций впервые была убедительно продемонстрирована с помощью линейных неадиабатических расчетов [36, 131]. С тех пор были проведены многочисленные детальные расчеты, как линейные, так и нелинейные (конкретные ссылки можно найти, например, в обзоре [133]), которые подтвердили эти выводы и почти не оставили сомнений в том, что зона второй ионизации гелия служит основным источником неустойчивости большинства

типов пульсирующих звезд, лежащих в полосе неустойчивости на диаграмме Герцшпрунга — Рассела (рис. 3.1).

Кристи [90] высказал предположение, подтвержденное затем Бейкером и Киппенханом [37], что в некоторых случаях важную роль в возбуждении пульсаций может играть ионизация водорода. Хотя последующие расчеты (ссылки см., например, в [133]) качественно подтвердили правильность такого предположения, тем не менее они показали, что для упомянутых типов пульсирующих звезд зона второй ионизации гелия остается главным источником возбуждения. (Однако ионизация водорода может служить основным дестабилизирующим фактором во многих красных переменных, см., например, [133, 296, 297, 324], а также работу [274], посвященную переменным типа Миры Кита.)

В статье Книга и Кокса [299] можно найти дополнительную информацию о поисках дестабилизирующего механизма.

10.3. Необходимое условие возникновения неустойчивости и некоторые следствия

В настоящем разделе мы используем качественные соображения, приведенные в этой главе, для вывода по порядку величины необходимого условия пульсационной неустойчивости под действием ионизационных механизмов рассмотренного вида. Несмотря на то что это необходимое условие очень приближенное, оно все же полезно для общего понимания, а также позволяет исходя из простых рассуждений выявить ряд качественных особенностей, касающихся по крайней мере высокотемпературной границы области неустойчивости (рис. 3.1). Получаемые выводы подтверждаются детальными расчетами (см., например, [133]). Но, ограничиваясь анализом необходимого условия, нам вовсе не обязательно рассматривать только основную моду колебаний. Некоторые идеи, лежащие в основе вывода необходимого условия, были использованы при изучении различных типов звезд [147, 152].

В разд. 10.1 было показано, что возникновение неустойчивости на высокотемпературной границе области неустойчивости обусловлено перемещением переходной области в зону второй ионизации гелия, происходящим, когда при постоянных массе M и светимости L увеличивается равновесный радиус R , т.е. уменьшается средняя эффективная температура T_e . Хотя зона ионизации водорода, как отмечено выше, также способствует возбуждению пульсаций, основной вклад в этот процесс вносит обычно зона второй ионизации гелия. Этот результат частично объясняет малую ширину полосы неустойчивости на диаграмме Герцшпрунга — Рассела (рис. 3.1), поскольку на низкотемпературной границе неустойчивость подавляется (вероятно, из-за конвекции), прежде чем зона ионизации водорода станет доминирующим источником возбуждения. Следовательно, для простоты можно рассматривать только зону второй ионизации гелия, и мы часто будем называть ее «главной областью возбуждения». Таким образом, при выводе необходимого условия неустойчивости мы можем исходить из приближенного совпадения переходной области с зоной второй ионизации гелия в звездной оболочке (разд. 10.1).

Обозначая звездочкой величины в средней части этой зоны, имеем $T_{\text{TR}} \sim T^* \sim 4 \cdot 10^4 \text{ K}$ и $(\Delta m)_{\text{TR}} \sim \Delta m^*$, где Δm^* — масса, лежащая над зоной второй ионизации гелия. А тогда необходимое условие неустойчивости определяется соотношением (10.2), в котором сделаны соответствующие замены:

$$\langle c_V T^* \rangle \Delta m^* / L\Pi \sim 1. \quad (10.3)$$

Легко показать, что величина Δm^* сильно возрастает с увеличением R и гораздо менее чувствительна к другим звездным параметрам, таким, как L и M . Отсюда следует, что Δm^* сильно возрастает с уменьшением T_c . Поэтому в соответствии с выражением (10.3) области неустойчивости рассматриваемого вида будут иметь резкие границы со стороны высоких температур. Кроме того, из-за сильной зависимости левой части соотношения (10.3) от T_c эти высокотемпературные, или «голубые», границы будут на диаграмме Герцшпрунга — Рассела почти вертикальными, что и наблюдается.

Необходимое условие неустойчивости (10.3) можно представить и в другом виде. Делая простые предположения о строении оболочки, которая считается лучистой, используя соотношение период — средняя плотность и производя некоторые преобразования, можно показать [130], что вдоль голубой границы области неустойчивости выполняется следующее соотношение:

$$L \propto Q^{-w} Y^y Z^{-z} M^l T_c^{-x}, \quad (10.4)$$

где Q — пульсационная постоянная для рассматриваемой моды (разд. 8.6), Y — доля гелия по массе, а Z — доля по массе более тяжелых элементов. Все показатели w , y , z , l и x обычно положительны, и их значения определяются строением оболочки, зависимость непрозрачности от температуры и плотности, а также другими факторами. Простая модель оболочки может дать приближенные значения показателей, но лучше определить их на основе детальных расчетов пульсаций. Здесь мы отметим только, что x довольно велико ($\approx 10 - 20$), а это подтверждает наши общие предположения о том, что голубая граница полосы неустойчивости на диаграмме Герцшпрунга — Рассела должна быть почти вертикальной.

Детальные расчеты пульсаций, как линейные, так и нелинейные (ссылки см., например, в [133]), подтверждают справедливость соотношения вида (10.4), по крайней мере вдоль ограниченных участков голубых границ, а также дают численные значения различных показателей. Типичные их значения таковы:

$$x \approx 10 - 20, \quad l \approx 0,5 - 1,$$

$$z \approx (0,002 - 0,05) x, \quad y \approx (0,05 - 0,2) x, \quad w \approx (0,1 - 0,15) x. \quad (10.5)$$

Выражение (10.4) находит ряд непосредственных применений. Например, оно включает известное соотношение период — светимость для классических цефеид (разд. 3.1). Если выразить T_c через L и R , а R в свою очередь с помощью соотношения период — средняя плотность выразить через Π , M и Q , то для данного химического состава и данной моды пульсаций соотношение (10.4) дает связь между L , M и Π . А последующее использование соотношения масса — светимость $L = L(M)$ приводит к зависимости $L = L(\Pi)$, которая

схематично и представляет собой соотношение период — светимость. Типичные значения показателей (10.5) дают приблизительно правильный наклон этой зависимости (см. также [130]). Таким образом, как светимость, так и период с перемещением вверх вдоль полосы неустойчивости возрастают, поскольку обе величины зависят главным образом от радиуса звезды, который в данном случае также увеличивается. Поэтому вполне понятно, что для пульсирующих звезд в полосе неустойчивости должно существовать соотношение между периодом и светимостью.

Следствие конечной ширины полосы неустойчивости и по ряду других причин соотношение период — светимость имеет разброс, достигающий $\sim 1^m$ при заданном периоде.

Кроме того, выражение (10.4) оказывается полезным для качественной оценки влияния различных факторов на голубые границы полосы неустойчивости. Например, при фиксированной светимости L увеличение Y сдвигает голубую границу в сторону более высоких значений T_e , а увеличение Z — в сторону более низких T_e , однако зависимость от Z обычно довольно слабая. В тех областях, где применимо соотношение (10.4), при переходе от низших гармоник к высшим (т.е. от более высоких значений Q к более низким) соответствующие голубые границы должны лежать при все больших T_e . Так, согласно (10.4), голубая граница для первой гармоник должна лежать при более высоких T_e , чем для основной моды. Это предсказание не всегда выполняется (см., например, [582]), поскольку соотношение (10.4) лишь необходимое, но не достаточное условие неустойчивости (см., например, [140]).

Зависимость положения голубых границ от Y и Z связана главным образом с непрозрачностью. Например, увеличение Y означает уменьшение содержания водорода X , а водород служит обычно основным источником непрозрачности. Поэтому вещество оболочки становится более прозрачным и температура, характерная для зоны второй ионизации гелия ($\sim 4 \cdot 10^4 K$), достигается при большем давлении, т.е. при большей массе Δm^* над этой зоной. Следовательно, чтобы левая часть (10.3) оставалась близкой к единице, необходимо увеличить T_e . Аналогичные рассуждения объясняют и зависимость от Z . Зависимость положения голубых границ от пульсационной постоянной Q обусловлена в основном чувствительностью выражения (10.3) к значению периода Π : чем меньше период (более высокая гармоника), тем меньше Δm^* , а это в свою очередь дает более высокое значение T_e .

Представленная в (10.4) зависимость голубых границ неустойчивости от массы объясняется более сложным образом, чем зависимость от других параметров, но и ее можно понять на основе необходимого условия (10.3). Соответствующее доказательство, слишком громоздкое, чтобы приводить его здесь, можно найти в работе Кокса и Книга [150].

Следует предупредить, что рассуждения, касающиеся выводов из необходимого условия неустойчивости, являются несколько упрощенными. Возможно, что такие усложняющие факторы, как кривизна оболочки (см., например, [131]), влияние конвекции на ее строение (например, [146, §27.7b]) и т.д., в ряде случаев изменяют некоторые заключения, сделанные непосредственно на основе соотношения (10.3).

В работе [125] было показано, что если звезда имеет слишком низкое содержание гелия, скажем меньше 20% по массе, то она не будет пульсировать в полосе неустойчивости.

ГЛАВА 11

ФАЗОВОЕ ЗАПАЗДЫВАНИЕ

В этой главе мы рассмотрим хорошо известную проблему фазового запаздывания для классических цефеид и звезд типа RR Лиры (разд. 3.1). Согласно обычной интерпретации результатов наблюдений, при пульсациях этих звезд светимость достигает максимума не в момент минимального радиуса, как можно было бы ожидать на основе применения теории адиабатических колебаний, а примерно через четверть периода после этого момента, т.е. приблизительно тогда, когда звезда быстрее всего расширяется. Такое отставание по времени и представляет собой «фазовое запаздывание».

Происхождение фазового запаздывания удалось довольно хорошо понять в последние годы: об этом более подробно будет рассказано в разд. 11.1. Разд. 11.2 посвящен в основном качественному рассмотрению теории, а разд. 11.3 — описанию некоторых количественных деталей. Наконец, в разд. 11.4 проводится сравнение с детальными расчетами и приведено несколько дополнительных замечаний.

Если не оговорено особо, то мы будем использовать здесь основные предположения, принятые в этой части книги (см., например, начало гл. 10).

11.1. Наблюдения и краткая история

Основной наблюдательный материал получают путем сопоставления кривых блеска и кривых лучевых скоростей пульсирующих звезд рассматриваемых типов. На рис. 3.2 уже были приведены такие кривые для δ Цефея — типичной классической цефеиды. Эти кривые наглядно демонстрируют фазовое запаздывание в указанном выше смысле.

Проблема фазового запаздывания привлекала внимание астрономов со времени первых тщательных наблюдений цефеид, т.е. примерно с 1915 г., и до недавнего времени стивила астрономов в тупик. Такие ученые, как Эддингтон, Росселанд, М.Шварцшильд и Мили, неодиократии пытались объяснить это явление (эти работы хорошо описаны в книге Росселанда [465]). Однако еще 10 — 15 лет назад все попытки оказывались безуспешными.

Линейаризованные расчеты в предположении лучистого переноса дают в зоне второй ионизации гелия фазовое запаздывание около 30 — 45°, обусловленное поглощением тепла в этой области при сжатии (качественное рассмотрение см. в разд. 9.1). Однако в ранних линейаризованных расчетах Кокса [131], в которых совершенно не учитывалась зона ионизации водорода, такое фазовое запаздывание сильно уменьшалось в области между зоной второй ионизации гелия и поверхностью звезды, поэтому на поверхности расчетное фазовое запаздывание светимости оказывалось очень малым, составляя лишь несколько градусов. С другой стороны, в линейаризованных расчетах

Бейкера и Киппеихана [37], где детально рассматривались как зона второй ионизации гелия, так и зона ионизации водорода, фазовое запаздывание получилось равным около 180° . Поскольку линеаризованные расчеты не давали правильного значения фазового запаздывания, исследователи пульсаций пришли к общему заключению, что этот эффект должен быть нелинейным.

Первое успешное вычисление фазового запаздывания было выполнено Кристи [91] при нелинейных расчетах звездных пульсаций на ЭВМ (гл. 12). Впоследствии правильное значение фазового запаздывания независимо получили Кастор [64] и Кокс и др. [145], применив до некоторой степени аналогичные методы. Однако эти нелинейные расчеты не раскрыли физической причины явления. Кроме того, поскольку все расчеты были нелинейными, их успех еще более укрепил господствовавшее мнение, что фазовое запаздывание должно быть нелинейным эффектом. (Однако в одной серии нелинейных расчетов на ЭВМ Кокса и др. [145] было установлено, что величина фазового запаздывания сохраняется вплоть до наименьших изученных амплитуд, соответствовавших полуамплитуде относительных изменений радиуса $|\delta R/R| \sim 10^{-4}$. Этот результат порождал некоторое сомнение относительно предполагаемой нелинейности эффекта, но в то время он не был проанализирован до конца.)

В 1968 г. Кастор [66] предложил простое физическое объяснение природы фазового запаздывания, по крайней мере для переменных типа RR Лиры, а возможно и для классических цефеид. Позже он подробно обосновал [68] предположения, которые лежат в основе такого представления. Согласно его теории, фазовое запаздывание — это в основном линейное явление (т.е. в точной линейной теории оно должно иметь место), хотя и подверженное значительному влиянию нелинейных эффектов. Детальные линеаризованные расчеты (конкретные ссылки см. в [133]) полностью подтвердили теорию Кастора. В разд. 11.4 мы более подробно проанализируем, почему линеаризованные расчеты Кокса [131] и Бейкера и Киппеихана [36, 37] не смогли дать правильное значение фазового запаздывания.

Оставшаяся часть данной главы будет посвящена в основном рассмотрению теории Кастора. (В работе [299] представлено главным образом ее качественное изложение.)

11.2. Качественное рассмотрение наиболее общепринятой теории

Сущность упрощенной теории Кастора [66] заключается в том, что фазовое запаздывание в основном обусловлено перемещением при пульсациях звезды очень тонкой зоны ионизации водорода вглубь и наружу по звездному веществу. Оказывается, что для классических цефеид и переменных типа RR Лиры приблизительно в тот момент, когда радиус звезды становится минимальным, в зону ионизации водорода поступает снизу наибольшее количество энергии [на уровне этой зоны почти исчезает фазовое запаздывание, обусловленное зоной второй ионизации гелия; см. замечания после уравнения (11.9)]. Сильное возрастание потока энергии в основании зоны ионизации во-

дорода приводит к тому, что в ней очень быстро поглощается энергия. Поглощенная энергия ионизует водород во внутренних частях этой зоны, что приводит к еще большему перемещению зоны частичной ионизации наружу. Общий результат состоит в том, что приблизительно тогда, когда радиус звезды становится минимальным, зона ионизации водорода быстрее всего перемещается по звездному веществу наружу. Таким образом, в случае приблизительно синусоидальных пульсаций эта зона окажется ближе всего (по массе) к поверхности примерно через четверть периода после момента достижения минимального радиуса. Далее, легко показать (разд. 11.3), что при лучистом переносе светимость звезды, в частности, обратно пропорциональна некоторой степени массы, лежащей над зоной ионизации водорода. Поскольку эта масса будет наименьшей примерно через четверть периода после минимума звездного радиуса, приблизительно в этот момент светимость звезды будет наибольшей.

Важным, если не основным элементом теории Кастора является исключительно малая толщина зоны ионизации водорода в условиях лучистого равновесия. Это обусловлено тем, что для звезд, к которым применима рассматриваемая теория, скажем, для звезд с эффективной температурой $T_e \leq 7 \times 10^3 - 8 \cdot 10^3$ К, непрозрачность κ в зоне ионизации водорода и выше нее является сильно возрастающей функцией температуры T . В случае лучистого переноса такая зависимость κ от T приводит к чрезвычайно крутому температурному градиенту в пределах зоны ионизации водорода и непосредственно над ней. Как правило, температура может возрастать примерно от 8000 К непосредственно над этой зоной до 15000 К внутри зоны, причем на расстоянии, составляющем лишь $\approx 1/20$ локальной высоты однородной атмосферы. Таким образом, зона ионизации водорода ведет себя почти как разрыв и именно так ее и можно трактовать. Кроме того, масса, лежащая в каждый отдельный момент над зоной ионизации водорода, является вполне определенной величиной, которая уверенно вычисляется из теории лучистого переноса (разд. 11.3). Резкое возрастание температуры проиллюстрировано в [133, Fig. 20].

11.3. Дополнительные подробности упрощенной теории

Следуя Кастору [66], будем рассматривать зону ионизации водорода как некоторый «фронт» или разрыв. Пусть L_1 — количество энергии, поступающее в единицу времени в эту зону снизу. Будем считать, что из решения, полученного для внутренних слоев, мы знаем L_1 в зависимости от времени t , и для простоты предположим, что в течение цикла пульсаций L_1 имеет максимум при минимальном значении звездного радиуса R . Количество энергии, выходящее в единицу времени через верхнюю границу зоны ионизации водорода, обозначим L_2 . Примем (см. разд. 9.1), что выше этой зоны величина L_2 остается неизменной в пространстве (но не во времени). Кроме того, будем предполагать, что во всех интересующих нас областях перенос энергии только лучистый.

Прежде всего мгновенную производную от полного давления P по массо-

вой переменной m с помощью уравнения импульса легко выразить через эффективное ускорение силы тяжести g_e , равное сумме обычного ускорения силы тяжести в поверхностных слоях и фактического мгновенного ускорения этих слоев при их движении. Строеие областей выше зоны ионизации водорода легко определить из теории лучистого переноса. В приближении лучистой теплопроводности эта теория позволяет выразить мгновенную производную от локальной температуры T по переменной m через саму температуру T , количество выходящей энергии L_2 (предполагаемое постоянным в соответствующих областях), радиус r этих областей (принимаемый равным мгновенному радиусу звезды R) и непрозрачность χ . Исключая из двух указанных выражений m , получим дифференциальное уравнение первого порядка для $\partial P / \partial T$, которое легко проинтегрировать, если представить χ в виде простой функции от P и T . Примем для χ следующее выражение:

$$\chi = \text{const} \cdot P^\sigma T^\sigma, \quad (11.1)$$

где типичные значения показателей степени в зоне ионизации водорода и выше нее заключены в пределах $1/2 \leq n \leq 1$, $4 \leq \sigma \leq 12$. Результат интегрирования показывает, что если $\sigma > 4$, а температура T по крайней мере в несколько раз выше температуры поверхности, то давление P становится почти постоянным в пространстве и равным давлению P_H в зоне ионизации водорода. Такое поведение давления P является следствием упомянутого очень крутого температурного градиента. Если выразить температуру поверхности через L_2 и R , то давление P_H можно представить в виде функции только от g_e , R и L_2 :

$$P_H \approx \text{const } g_e^{1/(n+1)} R^{\sigma/(2(n+1))} / L_2^{\sigma/4(n+1)}. \quad (11.2)$$

Однако P_H можно получить и посредством интегрирования уравнения импульса для заданного момента времени. Результат такого интегрирования дает P_H как функцию от g_e , R и Δm , где Δm — полное количество вещества, лежащее в данный момент над зоной ионизации водорода. Приравнявая оба выражения для P_H и разрешая относительно L_2 , получаем

$$L_2 = \text{const } R^{2(1+1/q)/[g_e^\beta (\Delta m)^{1/q}]}, \quad (11.3)$$

где

$$q = \sigma/[4(n+1)], \quad (11.4)$$

$$\beta = n/[q(n+1)]. \quad (11.5)$$

Типичными значениями являются $q \approx 1 - 2$, $\beta \approx 1/2 - 1/6$. Кроме того, значение постоянной в уравнении (11.3) зависит от полной массы звезды M , а также от n и σ . Выражение (11.3) определяет излучаемое в единицу времени количество энергии L_2 как функцию R , g_e и Δm в соответствии с теорией лучистого переноса.

В рассматриваемой упрощенной теории нам осталось получить лишь выражение для скорости перемещения зоны ионизации водорода $dm/dt = -d(\Delta m)/dt$ при пульсациях звезды.

В методе Кастора [66] учтена чрезвычайно малая толщина зоны ионизации водорода, что позволяет рассматривать эту зону как фронт или разрыв и применять для фронта соотношения типа соотношений Ранкина — Гюгонво. (Дальнейшее обсуждение этого подхода представлено в работе Адамса и Кастора [3].) Условия на фронте получают из уравнения неразрывности (4.4) и уравнения сохранения тепловой и механической энергии (4.26), записанных в консервативной форме. В системе координат, движущейся вместе с фронтом, течение предполагается стационарным. Обозначим с помощью символа Δ скачки соответствующих величин на фронте (т.е. разность между значениями с внешней и внутренней границ фронта, где под внешней границей подразумевается обращенная к поверхности звезда). Если пренебречь силой тяготения и предположить отсутствие генерации энергии в термоядерных реакциях, то из упомянутых условий на фронте можно получить следующее соотношение:

$$(dm/dt)\Delta(h + v^2/2) = -\Delta L. \quad (11.6)$$

Здесь L — полная локальная светимость, $h = E + P/\rho$ — удельная энтальпия звездного вещества, а v — скорость движения фронта относительно вещества (предполагается, что движение фронта строго радиальное).

Далее, скачок величины $(h + v^2/2)$ на фронте приблизительно равен энергии ионизации водорода на единицу массы, скажем χ , если вещество в рассматриваемой области состоит в основном из водорода. Это утверждение приблизительно подтверждается численными оценками: если $v = 10$ км/с (типичное значение), то $v^2/2 \approx 0,05 \cdot 10^{13}$ эрг/г, тогда как для чистого водорода $\chi \approx 1,3 \cdot 10^{13}$ эрг/г, поэтому обычно следует ожидать $\chi \gg v^2/2$. Кроме того, $\Delta h \approx \Delta E$ (E — внутренняя энергия на единицу массы) $\approx \chi$. Таким образом, из уравнения (11.6) получаем

$$dm/dt \approx (L_1 - L_2)/\chi, \quad (11.7)$$

где индексы 1 и 2 указывают значения соответственно на внутренней и внешней границах фронта.

Уравнение (11.7) непосредственно устанавливает, что при $L_1 > L_2$ зона ионизации водорода движется по звездному веществу наружу. Когда $L_1 > L_2$, в зоне происходит поглощение энергии, которая расходуется на ионизацию водорода, т.е. поглощение энергии заставляет зону ионизации водорода перемещаться наружу.

Уравнения (11.3) и (11.7) являются ключевыми уравнениями упрощенной теории Кастора [66]. Если выразить величину Δm из уравнения (11.3) и подставить в (11.7), то получится дифференциальное уравнение первого порядка для светимости L_2 с внешней стороны от зоны ионизации водорода. Решение этого уравнения дает L_2 как функцию времени t , радиуса звезды R , эффективного ускорения силы тяжести g_e и светимости L_1 с внутренней стороны зоны ионизации. Однако, вместо того чтобы рассматривать общую нелинейную задачу, лучше сразу линеаризовать уравнения (11.3) и (11.7) отчасти для упрощения, а отчасти чтобы в явном виде показать, что фазовое запаздывание действительно определяется в линейной теории.

Итак, линеаризуем уравнения (11.3) и (11.7) и исключим из полученных

уравнений производную dm/dt . Кроме того, заменим величину Δt на ее значение в равновесной модели, скажем Δm_0 , и опустим индекс 0 при равновесных величинах. В результате получим линеаризованное дифференциальное уравнение для $(\delta L/L)_2$:

$$d(\delta L/L)_2/dt + (L_0/g\chi\Delta m_0)(\delta L/L)_2 = (L_0/q\chi\Delta m_0)(\delta L/L)_1 + 2(1 + 1/q)d(\delta R/R)/dt - \beta d(\delta g_e/g_e)/dt, \quad (11.8)$$

где величины β и q определяются выражениями (11.4) и (11.5).

Предположим теперь, что все пульсационные переменные зависят от времени по закону $\exp[i\sigma t]$, где $\sigma = 2\pi/\Pi$ предполагается чисто вещественным, а Π — период пульсаций. В этом случае легко получить соотношение между $\delta g_e/g_e$ и $\delta R/R$ с параметром Ω^2 , где Ω — обычная безразмерная частота (см., например, разд. 8.6). Кроме того, примем, следуя Кастору, что

$$(\delta L/L)_1 = \alpha(\delta g_e/g_e), \quad (11.9)$$

где коэффициент α — чисто вещественный. Это предположение эквивалентно пренебрежению малым запаздыванием величины $(\delta L/L)_1$ относительно минимума радиуса, возникающим в более глубокой зоне второй ионизации гелия (разд. 11.1). Для звезд интересующего нас типа характерное значение коэффициента α составляет около 1/2 [66].

Решение уравнения (11.8) можно записать в следующем виде:

$$(\delta L/L)_2 = -i(\delta L/L)_1(\Theta/q)[1 + A + i(\Theta/q - A(\Theta/q)^{-1})]/[1 + (\Theta/q)^2], \quad (11.10)$$

где

$$A = (1/\alpha)[(1 + 1/q)/(1 + \Omega^2/2) + n/q(n + 1)], \quad (11.11)$$

$$\Theta = L_0/(\sigma\chi\Delta m_0). \quad (11.12)$$

Итак, величина Θ равна отношению энергии, излученной звездой при ее равновесной светимости L_0 за время $\Pi/2\pi$, к энергии, необходимой для ионизации всего водорода выше зоны его частичной ионизации.

Из уравнения (11.10) следует, что при $\Theta/q \rightarrow \infty$

$$(\delta L/L)_2 \rightarrow (\delta L/L)_1. \quad (11.13)$$

Следовательно, фазовое запаздывание величины $(\delta L/L)_2$ относительно $(\delta L/L)_1$, т.е. относительно минимума радиуса, стремится к нулю: мгновенная светимость звезды максимальна, когда радиус минимален. Поскольку $\Theta \propto (\Delta m_0)^{-1}$, описанный случай соответствует слишком малому значению Δm_0 , т.е. выше зоны ионизации водорода так мало вещества, что даже в самой зоне вариации светимости оказываются неизменными в пространстве. Теплосодержание этой зоны и слоев, лежащих над ней, оказывается столь малым, что не может приводить к заметному различию между $(\delta L/L)_2$ и $(\delta L/L)_1$. Из уравнения (11.3) легко видеть, что при постоянных значениях L_0 и M и для типичных значений показателей степени в законе непрозрачности справедливо соотношение $\Delta m_0 \propto T_e^{-12}$, т.е. $\Theta \propto T_e^{12}$, где T_e — равновесная эффективная температура звезды. Следовательно, рассмотренный случай соответствует высоким T_e ; в действительности этот случай реализуется лишь тог-

да, когда T_e настолько велико, что звезда на диаграмме Герцшпрунга — Рассела по всей вероятности, заметно смещена в сторону высоких температур от голубой границы области неустойчивости.

Рассмотрим теперь случай $\Theta/q \rightarrow 0$. Тогда из уравнения (11.10)

$$\delta(L/L)_2 \approx -A(\delta L/L)_1, \quad (11.14)$$

что соответствует фазовому сдвигу $(\delta L/L)_2$ относительно $(\delta L/L)_1$ на -180° . Значит, максимум светимости L достигается в момент максимума радиуса R . Этот случай соответствует слишком большому значению Δm_0 . Зона ионизации водорода расположена теперь так глубоко в звезде, что изменения Δm в течение периода оказываются относительно малыми и ими можно пренебречь. В данном случае $(\delta L/L)_2$ изменяется в противофазе с $(\delta L/L)_1$ и принимает наименьшее значение, когда $\delta g_e/g_e$ становится наибольшим. Зависимость $(\delta L/L)_2$ от $\delta g_e/g_e$ обусловлена в основном изменениями непрозрачности [уравнение (11.3)]. Однако при таком большом значении Δm_0 эффективная температура T_e столь мала, что звезда, вероятно, заметно смещена в сторону низких температур от обеих границ полосы неустойчивости, т.е. оказывается устойчивой.

Наконец, рассмотрим промежуточный случай, когда $\Theta/q \approx A^{1/2}$. В этом случае, согласно уравнению (11.10), имеем

$$(\delta L/L)_2 \approx -iA^{1/2}(\delta L/L)_1, \quad (11.15)$$

что соответствует запаздыванию $(\delta L/L)_2$ по фазе относительно $(\delta L/L)_1$ как раз на 90° : максимум светимости теперь достигается приблизительно через четверть периода после минимума радиуса. Условием такого фазового запаздывания на 90° служит равенство

$$\Theta/q = A^{1/2}. \quad (11.16)$$

При разумных значениях $\alpha = 1/2$ и $\Omega^2 = 10$ и для характерных значений показателей n и σ величина $A^{1/2}$ составляет от $\sim 0,91$ до $\sim 1,10$. Поэтому условие (11.16) для фазового запаздывания на 90° можно с достаточной точностью записать в виде

$$\Theta/q = 1. \quad (11.17)$$

В рассматриваемом случае величина Δm_0 , как и T_e , принимает промежуточные значения; изменения величины Δm в течение периода теперь существенны, и все же зона ионизации водорода и слои над ней обладают достаточной теплоемкостью, чтобы эта зона приводила к заметному различию между $(\delta L/L)_1$ и $(\delta L/L)_2$. Можно показать, что величина $d(-\Delta m)/dt$ теперь приблизительно совпадает по фазе с $(\delta L/L)_1$. Таким образом, примерно в то время, когда $(\delta L/L)_2$ максимально, а радиус R минимален, зона ионизации водорода быстрее всего перемещается в звездном веществе по направлению к поверхности. Минимальное расстояние (по массе между зоной ионизации водорода и поверхностью), а следовательно, максимальная светимость достигаются приблизительно тогда, когда звезда быстрее всего расширяется, как это и следует из интерпретации наблюдений (разд. 3.1).

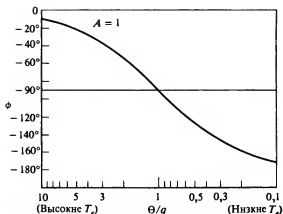


рис. 11.1. Фазовое запаздывание ϕ в зависимости от Θ/q , рассчитанное с помощью уравнения (11.10) для случая $A = 1$. Дополнительные пояснения см. в тексте.

На рис. 11.1 нанесена фаза ϕ величины $(\delta L/L)_2$ относительно $(\delta L/L)_1$ в зависимости от Θ/q , т.е. фактически относительно минимума радиуса. Это фазовое запаздывание ϕ вычислено из уравнения (11.10) для случая $A = 1$. Видно, что ϕ изменяется от $\approx -35^\circ$ для $\Theta/q = 3$ до $\approx -140^\circ$ для $\Theta/q = 0,3$. Указанный диапазон значений Θ/q соответствует (при фиксированных L_0 и M) интервалу изменений эффективной температуры $|\Delta \lg T_e| \approx 0,08$, что для звезд в области неустойчивости на рис. 3.1 составляет $\Delta T_e \approx 1200$ К. Этот интервал изменений T_e лишь немного превышает эмпирическую ширину полосы неустойчивости цефенд.

11.4. Сравнение с детальными расчетами и дополнительные замечания

Детальные расчеты показывают, что для большинства цефенд и переменных типа RR Лиры Θ заключено в пределах от 0,5 до 5. Как раз в таком диапазоне значений фазовое запаздывание составляет около 90° . Примечательно, что как условие появления фазового запаздывания, так и необходимое условие неустойчивости (разд. 10.3) удовлетворяются при таких значениях параметров, которые соответствуют звездам, лежащим в области неустойчивости на рис. 3.1, в которую попадают многие известные типы пульсирующих звезд. Поскольку эти явления (неустойчивость и фазовое запаздывание) обусловлены действием двух различных зон ионизации, наличие фазового запаздывания в пульсирующих звездах кажется более или менее случайным. Очевидно, что объяснение обоих явлений одним физическим механизмом, как поступал Эддингтон [199, 200], оказывается не совсем правильным. Однако точка зрения Эддингтона отчасти оправдывается самим существованием фазового запаздывания, поскольку оно подразумевает, что заметная доля суммарного возбуждения должна быть связана с зоной ионизации водорода. Данное утверж-

дение основано на том, что если теплоемкость этой зоны ионизации достаточна, чтобы привести к значительному различию между $(\delta L/L)_1$ и $(\delta L/L)_2$, то зона должна вносить существенный вклад в возбуждение пульсаций. Детальные расчеты, как линейные, так и нелинейные, показывают, что это действительно имеет место (конкретные ссылки см., например, в [133]).

Используя результаты неопубликованных линейных расчетов Кокса и Кинга [149], Кокс [133] рассмотрел зависимость ϕ от эффективной температуры для последовательности моделей классических цефеид при фиксированных значениях L_0 и M (зависимость представлена на рис. 21 в [133]). Оказывается, что вблизи голубых границ неустойчивости фазовое запаздывание ϕ близко к 90° как для основной моды, так и для первой гармоники; кроме того, изменение ϕ с T_e происходит в том же направлении, что и в упрощенной теории Кастора [66], и качественно согласуется с зависимостью, показанной на рис. 11.1. Для лучистых моделей переменных типа RR Лкры с помощью линейных расчетов были получены аналогичные результаты [68, 281].

Кастор [66] представил полуколичественные выводы о влиянии нелинейности на фазовое запаздывание. Он пришел к заключению, что в широком диапазоне значений параметров звезд совокупное действие нелинейных эффектов должно приводить к тому, что светимость будет стремиться достичь максимума приблизительно в момент максимума скорости расширения поверхности. Таким образом, из-за нелинейных эффектов фактическое фазовое запаздывание должно быть относительно нечувствительным к положению пульсирующей звезды в пределах полосы неустойчивости. Такое представление согласуется как с наблюдениями, так и с детальными нелинейными расчетами.

Нелинейные расчеты [298] подтвердили многие качественные выводы теории Кастора.

В работе [68] Кастор продолжил рассмотрение влияния нелинейности на поведение зоны ионизации водорода. Он показал, что, хотя в звезде, пульсирующей с малой, но конечной амплитудой, линейные уравнения могут серьезно нарушаться внутри зоны ионизации водорода, общее поведение этой зоны описывается линейными уравнениями примерно с такой же точностью, как и другие пульсационные переменные. Некоторую аналогию представляет использование соотношений Ранкина — Гюгюньо для ударной волны; такой метод даст точные соотношения между условиями на значительном расстоянии перед фронтом и за фронтом, хотя условия внутри фронта ударной волны описываются неточно. Этот результат служит дополнительным обоснованием для использования линейной теории при описании фазового запаздывания.

Карп [292] отметил, что в его нелинейных расчетах пульсаций цефеид фазовое запаздывание, по-видимому, больше связано с зоной второй ионизации гелия, чем с зоной ионизации водорода. В настоящее время неясно, как соотносится этот результат с теорией Кастора.

Кастор [68] подчеркнул также, что если бы в зоне ионизации водорода и выше нее важное значение имел конвективный перенос энергии, то фазовое запаздывание оказалось бы слишком большим — около 180° . Этот вывод со-

гласуется с более ранними линеаризованными расчетами Бейкера и Киппенхана [37], получившими фазовое запаздывание почти 180° для модели, которая в равновесном состоянии имела во внешних слоях эффективную конвекцию. Аналогичные качественные выводы были сделаны Ибенем [281]. С физической точки зрения, этот результат обусловлен тем, что для звезды с заданными значениями L_0 , M и T_e конвекция в равновесной модели приводит к увеличению массы Δm_0 над зоной ионизации водорода, а также к увеличению массы самой зоны. Следовательно, конвекция приводит к тому, что звезда оказывается ближе к рассмотренному выше пределу $\Theta/q \rightarrow 0$, который соответствует фазовому запаздыванию $\phi \rightarrow 180^\circ$. По мнению Кастора, фазовое запаздывание, наблюдаемое в реальных пульсирующих звездах, свидетельствует о том, что конвекция менее эффективна, чем предсказывается обычными теориями конвекции.

Как показывают двумерные расчеты конвекции в пульсирующих звездах, выполненные Дюпри [179], чтобы пульсирующая звезда стала устойчивой, достаточно такой слабой конвекции, что она не должна оказывать заметного влияния на фазовое запаздывание.

Наконец, линеаризованные расчеты Кокса [131] не дали правильного значения фазового запаздывания, очевидно, потому, что в них из практических соображений совершенно не учитывалась зона ионизации водорода.

ГЛАВА 12

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ

На пульсациях реальных звезд, несомненно, должны сказываться нелинейные эффекты, которые, вероятно, нельзя непосредственно описать с помощью линейной теории. Кокс [133] представил ряд конкретных свидетельств существования таких эффектов в природе. Он показал, например, что если основываться на поверхностных амплитудах пульсаций, определяемых из наблюдений, то относительные изменения давления, плотности и температуры на поверхности оказываются слишком большими для того, чтобы их можно было правильно предсказать посредством линейной теории. Кроме того, даже для отдельной моды кривые блеска и лучевых скоростей обычно не являются простыми синусоидами (см., например, рис. 3.2). Наконец, тот факт, что амплитуды наблюдаемых пульсаций переменных звезд одного и того же типа обычно не показывают чрезмерных вариаций от звезды к звезде, наводит на мысль о существовании нелинейного установившегося режима колебаний типа предельного цикла.

Однако полная система нелинейных уравнений настолько сложна, что, по-видимому, ни для каких реалистичных звездных моделей ее невозможно решить аналитически. Исключения могут представлять лишь два частных (и не очень реалистичных) случая, которые кратко рассматриваются в разд. 12.1. Кроме того, по-видимому, не существует математических методов, которые были бы особенно удобны при изучении нелинейных колебаний. Поэтому большинство недавних теоретических исследований звездных пульсаций целиком базировалось на численных методах с использованием быстрого дейст-

ющих ЭВМ, как кратко описывается в разд. 12.2. Однако за последнее время было сделано несколько новых попыток применения аналитических методов, и эти попытки перечислены в разд. 12.3.

Если не оговорено особо, то в настоящей главе мы будем исходить из тех же основных предположений, что и в остальных главах части II книги (см., например, вводные замечания к гл. 10).

12.1. Точно интегрируемые случаи

Точно интегрируемых случаев всего два и оба они относятся к адиабатическому движению при постоянном показателе адиабаты $\tilde{\Gamma}_1 = (d \ln P / d \ln \rho)_{\text{ад}}$. Эти случаи — звездная модель общего вида с $\Gamma_1 = 4/3$ и однородная модель (во всех точках которой плотность ρ одинакова) с произвольным, но постоянным значением $\Gamma_1 > 4/3$. Таким образом, мы рассматриваем здесь радиальные нелинейные адиабатические пульсации звездной модели с постоянным Γ_1 .

Уравнение движения — это уравнение (6.11), в котором функция $f(m, t) = -Gm/r^2$, где m — масса, заключенная внутри сферы радиусом r . Если использовать уравнение неразрывности [например, (6.8)] и принять, что колебания адиабатические, то ускорение \ddot{r} элемента массы можно выразить через r, r_0 (значение r для того же самого элемента массы в неп пульсирующей модели), m и Γ_1 . Предположим теперь, что переменные разделяются:

$$r(r_0, t) = x(r_0)w(t), \quad (12.1)$$

где $x(r_0)$ — функция только r_0 , а $w(t)$ — функция только времени t . Подставляя это выражение в уравнение для \ddot{r} , после некоторых преобразований получим

$$w^2 \ddot{w} = -\frac{x(r_0)}{r_0^2} \frac{1}{w^{3\Gamma_1-4}} \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dr_0} \left\{ P_0 \left[\frac{r_0^2}{x^2(r_0)} \frac{1}{dx(r_0)/dr_0} \right] \Gamma_1 \right\} - \frac{Gm}{x^3(r_0)}, \quad (12.2)$$

где величины с индексом 0 являются функциями только r_0 .

Для модели общего вида с $\Gamma_1 = 4/3$ мы сразу видим, что правая часть уравнения (12.2) является функцией только r_0 , а левая — функцией t . Следовательно, в данном случае возможно разделение переменных, и обе части уравнения (12.2) равны одной и той же постоянной, скажем A . Вероятно, простейший способ удовлетворить этому требованию — положить $x(r_0) = r_0$. Такое условие в свою очередь налагает требование $A = 0$, поскольку невозмущенная модель находится в гидростатическом равновесии. Поэтому мы получаем

$$w = Bt + C, \quad (12.3)$$

где B и C — постоянные интегрирования.

Таким образом, в этом случае решение (при надлежащем выборе постоянных) имеет следующий вид:

$$r = r_0(t/t_0), \quad (12.4)$$

где $r \propto t$, причем $\bar{r} = 0$ (гидростатическое равновесие). Из уравнения неразрывности получаем

$$\rho/\rho_0 = (t/t_0)^{-3} = (r/r_0)^{-3}, \quad (12.5)$$

а из уравнения импульса —

$$P/P_0 = (t/t_0)^{-4} = (r/r_0)^{-4}. \quad (12.6)$$

Но уравнения (12.4) — (12.6) — это уравнения гомологического движения при наличии гидростатического равновесия. Следовательно, можно сделать вывод, что произвольная звездная модель с $\Gamma_1 = 1/2$ при адиабатическом движении находится в состоянии безразличного равновесия и при любом значении радиуса может быть гидростатически равновесной.

Что касается второго точно интегрируемого случая, то в нем предполагается, что величина Γ_1 постоянна и не равна $1/2$. Тогда, чтобы можно было разделить переменные, в невозмущенной модели должно выполняться соотношение $x \propto t^{1/2}$, как это можно получить из уравнения (12.2). Отсюда следует, что

$$P_0/\rho_0^{\Gamma_1} = Bm^{1/2} + C, \quad (12.7)$$

где B и C — постоянные. Однако реалистичные звездные модели не подчиняются уравнению (12.7), и для них разделение переменных оказывается невозможным. Но это уравнение точно выполняется для однородной модели в гидростатическом равновесии. Поэтому для такой модели переменные разделяются, и для нее в случае радиальных нелинейных адиабатических пульсаций с $\Gamma_1 = \text{const}$ может быть получено точное решение. Описанный случай совершенно нереалистичный, но зато поучительный. Он довольно подробно рассмотрен Коксом [133] и Леду и Вальравеном [345, § 85], и поэтому здесь мы больше не будем на нем останавливаться. Отметим лишь, что проведенный для этой модели анализ показывает возможность существования осциллирующих решений только при $\Gamma_1 > 1/2$, точно так же как и в линейном случае (разд. 8.1).

12.2. Численные методы

Поскольку для пульсаций реалистичных звездных моделей в общем случае нельзя получить аналитических решений, то естественно, следует обратиться к численным методам. Два подхода были испытаны и нашли применение в прошлом: а) решение задач с начальными данными и б) поиск периодических решений нелинейных уравнений. Метод (б) является очень перспективным и уже дал ряд предварительных результатов (см. ниже), но он все еще находится до некоторой степени в стадии разработки. К настоящему времени довольно много расчетов было проведено с помощью метода (а), и поэтому большинство наших замечаний будет касаться этого подхода.

Методы численного решения задач с начальными данными основываются на разбиении звезды или ее оболочки на ряд дискретных сферических массовых зон или слоев (приблизительно на 50) и в использовании вместо уравнений гидродинамики с учетом переноса тепла конечно-разностных уравнений,

составленных, например, по рекомендациям книги Рихтмайера и Мортон [452]. Затем при определенных начальных условиях рассчитываемая модель звезды шаг за шагом прослеживается во времени на быстродействующей ЭВМ. Крэнн [90], Кокс и др. [142] и Алешин [14] первыми опубликовали результаты подобных расчетов. Более детальное описание таких методов можно найти в работах [91, 117, 143, 552 — 554]. Дальнейшее обсуждение и развитие этого подхода представлено, например, в работах [224, 320, 417]; см. также [4, 70, 161]. Некоторые результаты применения указанных методов, а также многочисленные ссылки приведены в [121, 133, 214].

При достаточном машинном времени такие методы позволяют для реалистичных моделей исследовать нарастание или затухание пульсаций, переход от малых амплитуд к большим, установление предельной амплитуды и ее характеристики, поведение моды колебаний и т.д. Эти расчеты подтвердили результаты расчетов с помощью линеаризованных уравнений и явились их дальнейшим развитием, они решили некоторые проблемы, касающиеся наблюдаемых пульсирующих звезд, но и поставили новые вопросы. Подобные расчеты, по крайней мере на современной стадии их развития, требуют определенной доли мастерства, и разные исследователи разрабатывают детальные методы для выполнения той или иной части расчетов. Трудности несколько уменьшились после проведенного в работе [214] сравнения результатов, полученных различными исследователями для одной модели. Оказалось, что результаты согласуются между собой. Поэтому можно сделать вывод, что в таких расчетах по крайней мере приближенно воспроизводится поведение реальных звезд с течением времени.

В последние годы некоторые усилия были затрачены на то, чтобы более или менее непосредственно получить периодические решения нелинейных уравнений гидродинамики с учетом переноса тепла. Эти усилия были в значительной степени стимулированы желанием обойти многочисленные трудности, присущие методу начальных данных (например, чрезвычайно большие затраты машинного времени со всеми сопутствующими неудобствами).

Первые попытки были сделаны Бейкером и фон Зенгбушем [38, 39, 611] (см. также [32]). В их методе разбиение модели на зоны, конечно-разностное представление уравнений, введение искусственной вязкости и т.д. очень сходны с использованными в методе начальных данных. При численном решении задач с начальными данными система конечно-разностных уравнений, аппроксимирующая четыре основных уравнения (неразрывности, импульса, энергии и потока энергии) решается методом итераций относительно четырех физических переменных (скажем, r_i , \dot{r}_i , $T_{i-1/2}$ и $V_{i-1/2}$) в каждой из зон (число которых равно, например, J) и для каждого шага по времени. Таким образом с учетом граничных условий для каждого шага по времени решаются $4J$ связанных между собой нелинейных уравнений для $4J$ неизвестных. Если один период содержит K шагов по времени (рассмотрение критериев выбора K см., например, в [117]), то полное число уравнений и неизвестных, которые следует решить для одного периода, равно $4JK$ (что в типичных случаях может составлять около 40 000 — 50 000). Метод поиска периодических решений нелинейных уравнений включает те же $4JK$ неизвестных, но теперь есть

еще $4J$ дополнительных неизвестных, так как значения величин в начале периода *a priori* не известны. Поскольку период Π не определен заранее, его также следует включить в число неизвестных. Итак, всего имеется $4J(K + 1) + 1$ неизвестное, $4JK$ уравнений и $4J$ периодических граничных условий. В рассматриваемом методе все неизвестные для одного периода определяются по сути дела одновременно с помощью некоторой усложненной разновидности схемы Ньютона — Рафсона. Условие периодичности приводит к тому, что значение периода Π оказывается собственным значением системы нелинейных уравнений и его определение является частью решения всей задачи. Эти периодические решения могут описывать не только основную, но и более высокие моды. Кроме периодического нелинейного поведения модели метод дает также информацию об устойчивости нелинейных предельных циклов и в общем представляется очень перспективным.

Позднее Стеллингверф [546 — 548] разработал метод, который достигает тех же целей, что и метод Бейкера — фон Зенгбуша, но является комбинацией описанных обоих подходов. В этом методе для некоторого начального момента времени задают пробные значения всех зависящих физических переменных, а также значение самого периода и выбирают число шагов по времени для одного периода. Затем с помощью метода начальных данных (или какой-либо его разновидности) проводят интегрирование модели на выбранное число шагов по времени. Полученные в конце периода значения физических переменных сравнивают с начальными значениями, а затем с помощью метода итераций варьируют эти начальные значения и сам период до тех пор, пока не достигается строгая периодичность. Как и в методе Бейкера — фон Зенгбуша, этот метод дает полную информацию о нелинейных предельных циклах для различных мод колебаний.

Указанные методы, по-видимому, являются единственными возможными методами изучения установившегося режима колебаний для звездных моделей с очень большими характерными временами нарастания или затухания пульсаций, очень медленным темпом перехода от одной моды колебаний к другой и т.д. В работе [135] подытожены некоторые предварительные результаты, полученные этими методами. Их дальнейшим исследованием и развитием занимается А. Кокс с сотрудниками (см., например, [123]). Бачлер [57] использовал новый подход, основанный на методе двухмасштабных разложений (см., например, [107]), который представляется очень многообещающим.

12.3. Аналитические методы

В ряде специальных случаев были сделаны многочисленные попытки получить нелинейные решения путем разложения по линейным адиабатическим собственным функциям или другими способами, но в этой книге мы их рассматривать не будем. Краткое изложение некоторых результатов, а также ссылки на более ранние исследования в данной области можно найти в работе Леду и Вальравена [345, §86 — 90] и в книге Росселанда [465, гл. 7]. Более поздние результаты представлены в статьях [369, 377, 389, 390, 416, 512 — 515, 517, 520, 597 — 600].

ГЛАВА 13

ПРОСТЫЕ МОДЕЛИ ЗВЕЗДНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ

Ясно, что неадиабатические (т.е. реальные) звездные пульсации — сложное явление. Это верно даже при очень малых амплитудах, когда применима линейная теория, а также в случае чисто радиальных колебаний. При больших амплитудах, когда важны нелинейные эффекты, ситуация оказывается почти безнадежно запутанной. По этим причинам был предпринят ряд попыток разработать такие модели звездных пульсаций, которые были бы достаточно просты, чтобы их можно было понять на основе привычных физических представлений, но при этом сохраняли бы физическую суть явления. Большинство попыток было основано на модели «однозонного» типа, которую можно представить как сферический концентрический слой вещества (возможно, относительно тонкий), расположенный внутри звезды. Пожалуй, самой первой и наиболее известной из таких моделей является «однозонная модель Бейкера» [31]*, довольно подробно описываемая в разд. 13.1. Эта модель предназначалась главным образом для анализа очень малых радиальных пульсаций, т.е. для объяснения нескольких сложных физических явлений, лежащих в основе пульсаций, описываемых линейной теорией. Модель привлекла внимание и была обобщена на случаи, которые не исследовались в оригинальной статье Бейкера [244, 284, 399, 589, 633]. Здесь мы не будем подробно останавливаться на этих обобщениях. Кроме того, если не оговорено особо, мы будем рассматривать только радиальные колебания.

Мур и Спигел [385] изучили линейные и нелинейные колебания осциллятора с тепловым возбуждением, который по предположению моделировал поведение конвективного элемента в стратифицированной оболочке звезды. Хотя эта модель не предназначалась для непосредственного применения к пульсирующим звездам, тем не менее некоторые решения поразительно напоминают поведение во времени определенных типов реальных пульсирующих звезд.

Ашер и Уитни [596] обсудили колебания однозонной модели, которая во многих отношениях сходна с однозонной моделью Бейкера. Они рассмотрели как линейные, так и нелинейные колебания, причем последние исследовались главным образом с помощью асимптотического метода с сохранением нелинейных членов только первого порядка по малому параметру. Данную модель, как и модель Мура и Спигела [385], мы здесь подробно рассматривать не будем.

Радд и Розенберг [470] предложили модель, специально предназначенную для исследования нелинейных неадиабатических пульсаций. Эта модель, по существу, также является однозонной, и ей посвящен разд. 13.2.

Стеллингверф [545] разработал однозонную модель, которая предназначена главным образом для изучения изменений выходящего потока излучения

* С. А. Жевакин также использовал в своих исследованиях однозонную модель (Астроф. ж. 31, 141, 1954). — Прим. ред.

как в линейной, так и в нелинейной теории. Модель является обобщением однозонной модели Бейкера и рассматривается в разд. 13.3.

Наконец, в разд. 13.4 описывается модель, разработанная для выяснения некоторых особенностей установления предельной амплитуды, анализа устойчивости предельных циклов и т.д. Эта модель предложена Кастором [67] и приводится здесь с его любезного согласия.

Все эти модели способствовали выяснению ряда сложных физических вопросов, связанных со звездными пульсациями, и пониманию роли различных физических механизмов, определяющих или затрагивающих некоторые аспекты этого явления. Однако вряд ли можно сомневаться, что реальные пульсирующие звезды устроены значительно сложнее применяемых для их описания однозонных моделей. Например, решающую роль в пульсациях может играть стратификация реальных звездных оболочек (т.е. изменение основных характеристик в пространстве), что в однозонных моделях учитывается лишь частично (если вообще учитывается). Упрощенные модели стратифицированных звездных оболочек, вне всякого сомнения, оказались бы полезными для более глубокого понимания физики звездных пульсаций.

13.1. Однозонная модель Бейкера

В этом разделе мы рассмотрим однозонную модель Бейкера [31] только в рамках линейной теории и для чисто радиальных колебаний. Нелинейные колебания обобщенной модели будут кратко описаны в разд. 13.3.

Можно отметить, что линеаризованный подход Джинса [287], основанный на предположении о гомологическом движении слоев вещества (когда $\delta r/r = \text{const}$ в пространстве), приводит к тем же результатам, что и однозонная модель Бейкера в линейной теории.

В модели Бейкера рассматривается расположенный внутри звезды отдельный сферический слой массой Δm . В этом слое вариации всех физических переменных (за исключением вариации светимости, см. ниже) предполагаются постоянными в пространстве. Затем основные уравнения линеаризуются (гл. 5 и 7) и отбрасываются все пространственные производные, за исключением $\partial(\delta L/L_r)/\partial m$ ($\delta L/L_r$ — относительная вариация светимости). Поскольку Бейкер намеревался использовать свою однозонную модель главным образом для изучения обычных типов пульсирующих звезд, в которых роль источников ядерной энергии незначительна (гл. 10), он исключил эти источники из своей модели. Однако при $\epsilon = 0$ (ϵ — скорость генерации термоядерной энергии на единицу массы) нельзя отбрасывать член $\partial(\delta L/L_r)/\partial m$, иначе полностью исчезают физические предпосылки возбуждения пульсаций.

В модели Бейкера этот член учитывается следующим образом. Количество энергии, поступающее в единицу времени на внутреннюю границу зоны, предполагается постоянным и равным локальной равновесной светимости; следовательно, на этой границе $\delta L/L_r = 0$. Однако на внешней границе допускается, чтобы соответствующая величина — обозначим ее $(\delta L/L_r)_U$ — изменялась с течением времени, позволяя этой зоне получать или терять тепло посредством модуляции проходящего через нее потока энергии. Кроме того,

$\delta L_r/L_r$ внутри зоны принимается равным $1/2 (\delta L_r/L_r)_U$, т.е. мгновенному среднему от значений $\delta L_r/L_r$ на обеих границах. Замена $\partial(\delta L_r/L_r)/\partial t$ на $(\delta L_r/L_r)_U/\Delta t$ приводит к следующему приближению:

$$\partial(\delta L_r/L_r)/\partial t = 2(\delta L_r/L_r)/\Delta t. \quad (13.1)$$

Бейкер рассматривает только лучистый перенос и считает, что вариация непрозрачности $\delta\kappa/\kappa$ определяется (в наших обозначениях) выражением

$$\delta\kappa/\kappa = n \delta\rho/\rho - s \delta T/T, \quad (13.2)$$

где $\delta\rho/\rho$ и $\delta T/T$ — относительные вариации соответственно плотности и температуры, а n и s — постоянные. Линеаризованное уравнение состояния записывается в виде

$$\delta P/P = \chi_\rho \delta\rho/\rho + \chi_T \delta T/T, \quad (13.3)$$

где $\delta P/P$ — относительная вариация давления, а χ_ρ и χ_T — постоянные (разд. 4.2в).

Поскольку все пространственные производные при этом исключаются, уравнения пульсаций образуют систему обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка по времени. Объединяя их в одно дифференциальное уравнение и предполагая, что зависимость всех пульсационных переменных от времени имеет вид e^{st} , получаем кубическое уравнение для собственной частоты

$$s^3 + K\sigma_0 A s^2 + B\sigma_0^2 s + K\sigma_0^3 D = 0, \quad (13.4)$$

где

$$A = (\Gamma_3 - 1)(s + 4)/\chi_\rho, \quad (13.5)$$

$$B = 3\Gamma_1 - 4, \quad (13.6)$$

$$D = (\Gamma_3 - 1)[3n\chi_T - s(4 - 3\chi_\rho) + 4(\chi_T + 3\chi_\rho - 4)]/\chi_\rho, \quad (13.7)$$

а величины Γ_1 и Γ_3 определены в разд. 4.2. Величины σ_0 и K определяются следующим образом:

$$\sigma_0^2 = g/r = Gm/r^3, \quad (13.8)$$

$$K = [\chi_\rho/(\Gamma_3 - 1)]2L/\Delta mc_V T\sigma_0, \quad (13.9)$$

где g , m , r , L , c_V и T — соответственно локальное ускорение силы тяжести, лагранжева массовая переменная, радиальное расстояние, светимость, теплоемкость на единицу массы при постоянном объеме и температура, причем все величины относятся к равновесному состоянию и поэтому не зависят от времени.

Нинже будет показано, что $\sigma_0 \approx 2\pi/\Pi$, где Π — период адиабатических пульсаций однозонной модели. Тогда из формулы (13.9) следует, что K приблизительно равно отношению потока энергии, протекающего через модель за промежуток времени $\Pi/2\pi$, к внутренней энергии модели. Приближенно K можно также рассматривать как отношение времени свободного падения к кельвинновскому времени для этой зоны. Таким образом, понятно, что

K — это параметр, характеризующий степень неадиабатичности модели: малые K соответствуют почти адиабатическому движению, а большие — значительным отклонениям от адиабатичности.

При $K = 0$, что соответствует идеальному адиабатическому движению, уравнение (13.4) имеет всего лишь два ненулевых корня

$$\delta = \pm i(3\Gamma_1 - 4)^{1/2}\sigma_0 = \quad (13.10a)$$

$$= \pm i[(3\Gamma_1 - 4)^{1/2}\pi G \bar{\rho}(r)]^{1/2}. \quad (13.10b)$$

Здесь $\bar{\rho}(r)$ определяется соотношением $\bar{\rho}(r) = m/(\frac{4}{3}\pi r^3)$, где m — масса, заключенная внутри сферы радиуса r . При $\Gamma_1 > 4/3$ оба корня чисто мнимые, что соответствует пульсациям с постоянной амплитудой; период пульсаций равен $\Pi = 2\pi/[(3\Gamma_1 - 4)^{1/2}\sigma_0]$. Отметим, что если вместо $\bar{\rho}(r)$ подставить среднюю плотность $\bar{\rho}$ всей звезды, то получим результат, точно такой же, как для адиабатических пульсаций однородной модели (разд. 8.1) или слоевой модели из разд. 2.1. По тем же причинам, что и в разд. 9.3, два возможных знака в выражении для δ не имеют физического смысла.

Ясно, что при $\Gamma_1 < 4/3$ оба корня чисто вещественные и соответствуют динамической неустойчивости. Следовательно, условие динамической устойчивости однозонной модели состоит в том, что [см. выражение (13.6)]

$$B > 0. \quad (13.11)$$

Рассмотрим теперь случай $K \neq 0$. Бейкер исследовал корни уравнения (13.4) и показал, что помимо условия (13.11) есть еще два необходимых условия того, чтобы все корни имели отрицательные вещественные части, т.е. чтобы однозонная модель была устойчивой относительно всех возможных видов радиального движения. Эти условия таковы:

$$D > 0, \quad (13.12)$$

$$AB - D > 0, \quad (13.13)$$

где A , B и D определяются выражениями (13.5) — (13.7).

Легко видеть, что условие (13.12) является условием вековой устойчивости (разд. 19.6). Например, очевидно, что существует малый по абсолютной величине корень уравнения (13.4), скажем δ_1 , приблизительно равный

$$\delta_1 \approx -K\sigma_0 D/B = -K\sigma_0 D/(3\Gamma_1 - 4). \quad (13.14)$$

Этот корень чисто вещественный, что соответствует аperiодическому движению, устойчивому при $D > 0$ (в предположении $\Gamma_1 > 4/3$). Характерное время, связанное с таким движением, составляет по порядку величины $(L/c_V T \Delta m)^{-1}$, т.е. равно времени тепловой релаксации или кельвиновскому времени для этой зоны. Отметим, что при $\chi_\rho = \chi_T = 1$ (простой идеальный газ) условие вековой устойчивости (13.12) приобретает вид

$$3\eta - s > 0 \quad (13.15)$$

и совпадает с условием Джинса [287] без учета членов, описывающих выделение термоядерной энергии (см., например, [336, p.420 — 421] и разд. 19.6 на-

стоящей книги). Физически оно устанавливает, что при сжатии $\delta L_r/L_r$ должно уменьшаться. В таком случае излучение запирается в зоне при ее сжатии; затем это излучение заставит зону расширяться и охлаждаться, и в результате она вернется в исходное состояние.

Условие (13.13) — это условие пульсационной устойчивости. Это легче всего понять (по крайней мере при $K \ll 1$), вычислив два больших по абсолютной величине корня уравнения (13.4), скажем $\delta_{2,3}$, в виде ряда по степеням K :

$$\delta_{2,3} \approx \pm iB^{1/2}\sigma_0 - \sigma_0(AB - D)K/2B + \dots \quad (13.16)$$

Из выражения (13.16) следует, что условие (13.13) действительно является необходимым условием пульсационной устойчивости.

Если использовать выражения (13.5) — (13.7), то после ряда преобразований с учетом нескольких термодинамических тождеств условие (13.13) для пульсационной устойчивости одиозонной модели можно записать в следующем виде:

$$4(\Gamma_3 - 1) + [s(\Gamma_3 - 1) - n] - 4/3 = \Lambda > 0. \quad (13.17)$$

Это выражение служит также определением величины Λ . Отметим, что данное соотношение справедливо даже при $\chi_p \neq 1$ и $\chi_T \neq 1$. Как показал Бейкер [31], каждый член здесь имеет вполне определенный физический смысл. Первый член, $4(\Gamma_3 - 1)$, всегда положителен, т.е. всегда оказывает стабилизирующее влияние. Он характеризует охлаждение при сжатии, обусловленное усилением в этот момент потоком излучения ($L \propto T^4$ и в адиабатическом приближении $T \propto \rho^{\Gamma_3 - 1}$). Мы уже видели, что в зоне ионизации элемента с наибольшим содержанием $\Gamma_3 \rightarrow 1$, и, следовательно, в такой зоне эффекты затухания, описываемые этим членом, уменьшаются. С физической точки зрения ионизация препятствует очень сильному росту температуры при сжатии, а значит, и потерям излучения в этот момент. Такое влияние ионизации на первый член характеризует (частично) действие γ -механизма (разд. 10.1).

Второй член в (13.17), $s(\Gamma_3 - 1) - n$, описывает эффект изменений непрозрачности и может иметь любой знак. При обычных значениях параметров ($n \approx 1$, $s \approx 3$, $\Gamma_3 - 1 \approx 2/3$) этот член положителен, т.е. способствует затуханию пульсаций. В данном случае непрозрачность уменьшается при сжатии и способствует в этот момент оттоку тепла из зоны, т.е. затуханию. Однако в зоне ионизации элемента с наибольшим содержанием $\Gamma_3 \rightarrow 1$, а поэтому рассматриваемый член может стать отрицательным и способствовать возбуждению пульсаций. С физической точки зрения изменения температуры становятся относительно малыми вследствие ионизации, так что в изменениях непрозрачности доминирующую роль играют теперь изменения плотности, а непрозрачность всегда возрастает с увеличением плотности (при постоянной температуре). Следовательно, в данном случае изменения непрозрачности приводят к запираанию потока излучения при сжатии, т.е. способствуют возбуждению пульсаций. Эти дестабилизирующие эффекты изменений непрозрачности характеризуют действие κ -механизма (разд. 10.1).

Если бы s было велико и отрицательно (или хотя бы имело меньшее, чем

обычно, положительное значение), то второй член в (13.17) описывал бы запирание потока излучения при сжатии, т.е. способствовал бы возбуждению пульсаций, даже если бы величина Γ_3 имела обычное значение, близкое к 5/3. Именно при таких условиях (когда s оказывается меньше, чем обычно, и $\Gamma_3 \approx 5/3$) действует механизм скачка непрозрачности, предложенный Стеллингверфом [550] и описанный в разд. 10.1.

Третий член в (13.17) ($-4/3$) отрицателен и поэтому способствует возбуждению пульсаций. Он обусловлен сферической симметрией и в плоскопараллельном случае отсутствует. Он просто отражает зависимость локальной светимости от площади сферической поверхности, ограничивающей рассматриваемый массовый уровень ($L_r \propto r^4$). Площадь поверхности уменьшается при сжатии, т.е. суммарный поток излучения при этом уменьшается (выход излучения задерживается), что способствует возбуждению пульсаций. Такое влияние сферической симметрии Бейкер [31] назвал «эффектом радиуса».

Условие (13.17) можно интерпретировать также следующим образом. Рассмотрим линеаризованное уравнение лучистого переноса для однозонной модели

$$\delta L_r / L_r = 4\xi - n\delta\rho/\rho + (s + 4)\delta T/T, \quad (13.18)$$

где $\xi = \delta r/r$, $\delta L_r / L_r$, $\delta\rho/\rho$ и $\delta T/T$ — соответственно пространственные части относительных вариаций радиуса, светимости, плотности и температуры. Используя теперь квазиadiaбатическое приближение, $\delta T/T = (\Gamma_3 - 1)\delta\rho/\rho$, получаем

$$\delta L_r / L_r = (\delta L_r / L_r)_{ad} = \Lambda(\delta\rho/\rho). \quad (13.19)$$

Здесь Λ соответствует выражению (13.17), а $(\delta L_r / L_r)_{ad}$ — вариация $(\delta L_r / L_r)$, вычисленная в квазиadiaбатическом приближении. Таким образом, условие (13.17) для пульсационной устойчивости однозонной модели можно представить в виде

$$(\delta L_r / L_r)_{ad} > 0, \quad (13.20)$$

при этом, по-видимому, проявляется физический смысл условия устойчивости: при сжатии зона должна терять тепло вследствие повышенного излучения с ее поверхности. Это утверждение полностью согласуется с физическим рассмотрением, представленным в разд. 9.1.

Приведенное утверждение на первый взгляд кажется не совсем корректным, поскольку в выражении (13.20) фигурирует лишь $(\delta L_r / L_r)_{ad}$, а не истинная вариация светимости $(\delta L_r / L_r)$. Однако можно показать, что $(\delta L_r / L_r)$ по существу всегда имеет тот же знак, что и $(\delta L_r / L_r)_{ad}$. Таким образом, при сделанных предположениях выражение (13.20) без индекса «ad» также является совершенно эквивалентной формулировкой условия пульсационной устойчивости однозонной модели.

Еще один подход, который выявляет ряд интересных особенностей однозонной модели, а также позволяет существенно обобщить вытекающие из ее анализа выводы, состоит в применении к ней интегральных выражений (9.45) и (9.46). Первое выражение дает значение C . Вещественная часть C ,

пропорциональна скорости, усредненной по периоду, с которой сила гравитации и силы, обусловленные наличием градиента давления, совершают работу над звездой. Поэтому условие пульсационной устойчивости состоит в том, что $C_r < 0$.

Применяя данное условие к однозонной модели, можно предположить, что пульсирует лишь эта зона массой Δm , т.е. интегрирование должно проводиться только в пределах Δm . Кроме того, не нарушая общности, пространственную часть относительной вариации плотности $\delta\rho/\rho$ в однозонной модели всегда можно считать чисто вещественной. Поскольку в однозонной модели все физические величины предполагаются постоянными в пространстве, в качестве условия пульсационной устойчивости мы получаем следующее выражение:

$$C_r = (\Gamma_3 - 1)(\delta\rho/\rho)\delta(\epsilon - \partial L_r/\partial m)_r \Delta m < 0, \quad (13.21)$$

где $\delta(\epsilon - \partial L_r/\partial m)_r$ — вещественная часть величины $\delta(\epsilon - \partial L_r/\partial m)$, которая здесь и далее в этом разделе обозначает только пространственную часть полной вариации. Величину ϵ мы оставили здесь для общности и для иллюстрации того, как легко обобщить однозонную модель Бейкера в рассматриваемом подходе. Если считать, что $(\delta\rho/\rho) > 0$, то условие (13.21) пульсационной устойчивости однозонной модели преобразуется к виду

$$\delta(\epsilon - \partial L_r/\partial m)_r < 0. \quad (13.22)$$

Это условие просто означает, что для пульсационной устойчивости модели зона должна терять тепло при сжатии в полном согласии с физическим рассмотрением, представленным в разд. 9.1.

Вследствие общности изложенного подхода неравенство (13.22) должно содержать в себе как частный случай неравенство (13.20), что, как легко видеть, действительно имеет место. Отметим, например, что в (13.22) не содержится никаких допущений о механизме переноса, тогда как при выводе выражения (13.20) использовалось явное предположение лучистого переноса. Кроме того, выше уже указывалось, что выражение (13.20) содержит только квазиадиабатические вариации светимости, тогда как (13.22) охватывает вещественные части неадиабатических вариаций скорости генерации энергии ϵ и локальной светимости L_r .

Если $\delta(\delta L_r)/\delta t$ вычисляется в приближении Бейкера (см. выше), то ϵ полагается равным нулю, а если перейти, кроме того, к квазиадиабатическому приближению, то получится выражение (13.20), как и следовало ожидать. Можно отметить, что это выражение непосредственно применимо к многим обобщенным или уточненным вариантам исходной однозонной модели Бейкера. Например, величина L_r в (13.22) может быть суммой лучистой и конвективной светимостей. Кроме того, не обязательно принимать $\epsilon = 0$. Действительно, если мы примем $\delta\epsilon/\epsilon = \lambda\delta\rho/\rho + \nu\delta T/T$, используем выражение (13.18) для $\delta L_r/L_r$ и в обоих случаях воспользуемся адиабатическим приближением, то условие устойчивости примет следующий вид:

$$\lambda + \nu(\Gamma_3 - 1) - (s + 4)(\Gamma_3 - 1) + (n + 4/3) < 0. \quad (13.23)$$

Это условие отличается от условия (13.17) Бейкера [31] только наличием членов, содержащих коэффициенты λ и ν . Фактически условие (13.23) идентично условию Джинса [287] для пульсационной устойчивости звезды с непрерывным распределением вещества, которая испытывает гомологические пульсации и для которой справедливо уравнение состояния идеального газа. С помощью довольно громоздких алгебраических преобразований выражение (13.23) можно получить и непосредственно на основе подхода Бейкера, как упоминалось в начале данного раздела.

13.2. Модель Радда — Розенберга

Модель Радда и Розенберга [470] — одиозонная модель, сходная в своих основных чертах с моделью, изученной Ашером и Уитни [596]. Она сходна и со слоевой моделью, рассмотренной в разд. 2.1, только в отличие от нее радиус жесткого ядра может составлять любую долю равновесного радиуса слоевой модели, который можно отождествлять с радиусом звезды. Главная цель, которой надеялись достичь Радд и Розенберг с помощью своей модели, заключалась в установлении некоторых математических соотношений, лежащих в основе описания полностью нелинейных звездных пульсаций и в анализе явлений типа предельного цикла, наблюдающихся в реальных пульсирующих звездах. Благодаря рассмотрению одиозонной модели им удалось исследовать действительно предельные циклы колебаний. Точнее говоря, они хотели разработать модель, в которой при малых амплитудах имела бы место колебательная неустойчивость, а при больших существовал бы устойчивый предельный цикл.

Если M — масса жесткого ядра, $\mathcal{M} \ll M$ — масса газа в рассматриваемой зоне, а r — ее мгновенный радиус, то уравнение движения зоны записывается в следующем виде (как в статье [596]):

$$\mathcal{M} d^2 r / dt^2 = 4\pi r^2 P - G M \mathcal{M} / r^2, \quad (13.24)$$

где P — давление газа в зоне. В уравнении (13.24) предполагается, что газ в зоне ведет себя так, как будто вся масса \mathcal{M} сконцентрирована в бесконечно тонком слое радиуса r ; этот слой можно рассматривать как тонкую растяжимую мембрану, содержащую газ. Равновесный радиус зоны r_0 определяется соотношением (13.24), если приравнять в нем нулю производную $d^2 r / dt^2$.

Чтобы учесть уравнение энергии [например, в виде (4.30)], мы не будем дифференцировать (13.24), а затем исключать величину \dot{P} (точка означает субстанциональную производную по времени) с помощью уравнения энергии, как это делалось при выводе уравнения (6.13). В обсуждаемой модели уравнение энергии используется в интегральной форме. Мы рассмотрим здесь только термодинамически обратимые процессы, для которых $dq/dt = T \dot{s}$ (s — удельная энтропия). Формальное интегрирование уравнения энергии (4.30а) дает

$$P/P_0 = K(\rho/\rho_0)^{\Gamma_1}, \quad (13.25)$$

где

$$K = \rho_0^{\Gamma_1 - \Gamma_{1,0}} \exp \left\{ - \int_i \dot{\Gamma}_1 \ln \rho dt + \int_i (\chi_T \dot{s} / c_V) dt \right\}, \quad (13.26)$$

а индексом 0 обозначены равновесные величины. Для адиабатического движения ($\dot{s} = 0$) при $\Gamma_1 = \text{const}$ имеем $K = 1$. Авторы модели допускают переменность K , но не связывают принятую для этой величины конкретную функциональную форму (см. ниже) с детальными физическими процессами, действующими в зоне.

Точное соотношение между ρ/ρ_0 и r/r_0 для рассматриваемой модели можно записать в виде

$$\rho/\rho_0 = (r/r_0)^{-m}, \quad (13.27)$$

где

$$m = \ln \{ [(r/r_0)^3 n_0^3 - 1] / (n_0^3 - 1) \} / \ln(r/r_0), \quad (13.28)$$

а $n_0 = r_0/r_c \geq 1$ (r_c — радиус жесткого ядра). Если $r = r_0$ в (13.28) [$r = r_0$ в (13.27)], то величина m становится постоянной, значение которой зависит только от n_0 :

$$m = 3n_0^3/(n_0^3 - 1). \quad (13.28')$$

Если бы $r_c = 0$ ($n_0 = \infty$), то $m = 3$, как и в однородной модели (разд. 8.1) или в слоевой модели (разд. 2.1). Из соотношения (13.28) следует, что $m > 3$ при $n_0 > 1$ и $r/r_0 \approx 1$ (скажем, $0,95 \leq r/r_0 \leq 1$, как для цефеид и переменных типа RR Лиры). Значение $m \approx 12$ соответствует $n_0 \approx 1,2$; авторы модели приводят доводы, что такие значения могут соответствовать реальным пульсирующим звездам, в которых эффективно пульсируют только самые внешние слои (разд. 8.12в). С физической точки зрения в тонком слое газа, расположенном над жесткой сферой, малое изменение внешнего радиуса будет оказывать относительно большое влияние на среднюю плотность газа в слое.

Подставляя уравнения (13.25) и (13.27) в (13.24), получаем окончательное уравнение движения, используемое для данной модели

$$\ddot{w} = (GM/r_0^3)[K/w^n - 1/w^2], \quad (13.29)$$

где $w = r/r_0$, $n = m\Gamma_1 - 2$ и предполагается, что K можно представить в виде функции только от малой величины $(1 - w)$. Отметим, что $n = 3\Gamma_1 - 2$ при $m = 2$ (однородная модель) и $n = 18$ при $m = 12$ и $\Gamma_1 = 5/3$ (такое значение n обычно используют в численных оценках). Как следует из обсуждения в разд. 8.1, условие динамической устойчивости, т.е. условие существования осциллирующих решений, состоит в том, что $n > 2$.

Радд и Розенберг предложили рассматривать фазы расширения и сжатия при пульсациях как количественно различные. Некоторым обоснованием такого предположения авторы модели считают анализ траектории в фазовой плоскости для звезды δ Цефея: расширение и сжатие происходят, по-видимому, относительно различных значений равновесного радиуса, причем при расширении равновесный радиус больше, чем при сжатии.

Поэтому в функциональной зависимости для величины K использовались различные параметры для каждой из двух этих фаз. Конкретный вид зависимостей, которые были окончательно приняты, таков:

$$K_e = E_0 + E_2(1 - w)^2, \quad (13.30a)$$

$$K_c = C_0 + C_2(1 - w)^2, \quad (13.30б)$$

где индексы e и c относятся соответственно к фазам расширения и сжатия. Ниже будут приведены некоторые доводы в поддержку таких функциональных зависимостей и рассмотрены значения постоянных.

Предполагается, что переход от одного из уравнений (13.30) к другому происходит скачкообразно в конце очередной фазы расширения или сжатия. Однако величины w и \dot{w} считаются при движении непрерывными. Следовательно, ускорение \ddot{w} , а поэтому и суммарная сила, действующая на зону, изменяются скачкообразно в конце каждой фазы расширения или сжатия.

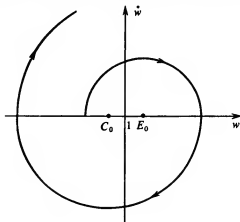


рис. 13.1. Фазовая траектория для осциллятора, который скачкообразно переключается с одного «центра» ($E_0 > 1$) в фазе расширения на другой «центр» ($C_0 < 1$) в фазе сжатия.

Предположение о различных равновесных радиусах для двух полупериодов пульсаций означает, что

$$E_0 > 1 > C_0. \quad (13.31)$$

Справедливость неравенств (13.31) легко доказать, если положить в уравнении (13.29) $\ddot{w} = 0$, а затем найти его решение, скажем $w = w_0$. Если пренебречь в уравнениях (13.30) квадратичными членами, то это равносильно предположению о малых колебаниях относительно значения $w = 1$. А тогда, замечая, что в фазе расширения w_0 больше, чем в фазе сжатия, мы получаем неравенства (13.31). Таким образом, положительные силы, направленные наружу, в течение фазы расширения непосредственно после момента минимума

радиуса (когда скорости положительны) действуют на большем расстоянии, чем в течение фазы сжатия непосредственно перед моментом минимума радиуса (когда скорости отрицательны). Квадратичная зависимость K_e и K_c от $(1 - w)$ была выбрана в соответствии с требованием [см. выражение (13.26)], чтобы K никогда не было отрицательно. Из тех же соображений все величины E_0 , E_2 , C_0 и C_2 в выражениях (13.30) должны быть положительны.

Авторы показывают, что в пределе малых амплитуд, когда в выражениях для K_e и K_c можно пренебречь квадратичными членами, условие $E_0 > C_0$ ведет к нарастанию амплитуды, т.е. к самовозбуждению пульсаций. Этот вывод легче всего понять с помощью представления о траектории в фазовой плоскости (рис. 13.1). В течение фазы расширения точка $E_0 > 1$ служит «центром» для данного полупериода, а в течение второго полупериода — фазы сжатия — «центром» является точка $C_0 < 1$. Ясно, что такое последовательное переключение с одного центра на другой ведет к увеличению амплитуды колебаний.

Отметим, что условие $E_0 > C_0$ можно также интерпретировать на примере осциллятора, в котором возвращающая сила немного запаздывает относительно фазы максимального смещения. В пределе малого запаздывания рассмотрение величин K как постоянных эквивалентно предположению, что в течение каждого полупериода движение является адиабатическим; но в каждой точке поворота оно на бесконечно малое время становится неадиабатическим, причем в момент минимума радиуса в зону поступает больше энергии, чем отводится в момент максимального расширения. Поэтому (цитируя авторов) модель является «кусочнokonсервативной», но «неконсервативной в целом».

Ограничение амплитуды и установление стационарного режима пульсаций обусловлено в рассматриваемой модели неадиабатическими квадратичными членами в выражениях для K [см. формулы (13.30)]. Довольно сложным путем доказываются, что необходимым и достаточным условием существования устойчивого предельного цикла для этой модели является условие $C_2 > E_2$. Физически это условие приблизительно соответствует требованию, что неадиабатические эффекты во время, например, значительного смещения вглубь должны вызывать относительное увеличение возвращающей силы (направленной наружу), когда газ движется внутрь к состоянию с минимальным радиусом, и относительное уменьшение возвращающей силы (направленной внутрь), когда газ расширяется из указанного состояния (при значительном смещении наружу верно обратное).

Существование предельного цикла можно также понять с помощью введенных Раддом и Розенбергом потенциальных кривых, которые по существу являются первыми интегралами уравнения движения (13.29). Эти первые интегралы можно написать в виде

$$\dot{w}^2/2 = -V + \text{const}, \quad (13.32)$$

где

$$V = -(GM/r_0^3) \{ (K/w^n - 1/w^2)dw. \quad (13.33)$$

Авторы в своей работе приводят явные соотношения, соответствующие принятым функциональным зависимостям для K [см. формулы (13.30)]. Пересечение одной из кривых $V(w)$ с линией, параллельной оси w и соответствующей заданной полной энергии, дает точки поворота, в которых $\dot{w} = 0$. Соответствующие потенциальные кривые для малых амплитуд, скажем V_e и V_c , можно получить из этих соотношений, полагая в них $E_2 = C_2 = 0$.

В работе Радда и Розенберга [470] представлены такие потенциальные кривые $V(w)$ для малых амплитуд. Следует отметить, что всегда $V_e > V_c$ и что разность $V_e - V_c$ увеличивается с уменьшением w от значения $w = 1$ и падает с ростом w от этого значения. Приведенные авторами рисунки ясно показывают нарастание амплитуды колебаний. Очевидно, что в случае потенциальных кривых такого рода не существует предельного цикла и амплитуда колебаний неограниченно возрастает.

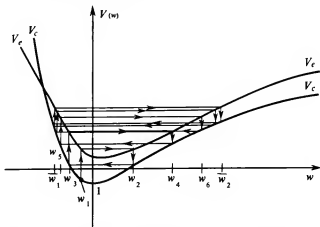


рис. 13.2. Кривые потенциальной энергии (схема) для больших амплитуд ($E_2 \neq 0$, $C_2 \neq 0$) в случае, когда возможно существование предельного цикла ($C_2 > E_2$) [470].

Потенциальные кривые V_e и V_c , схематически изображенные на рис. 13.2 (заимствованном из [470]), показывают для случая $C_2 > E_2$ влияние квадратичных неадиабатических членов при больших амплитудах: при сжатии кривая V_c искажается сильнее, чем кривая V_e . При $C_2 > E_2$ искажение таково, что кривая V_c становится круче. Это свидетельствует о наличии при значительных смещениях вглубь большей возвращающей силы во время сжатия, чем во время последующего расширения, что подтверждает качественные рассуждения, приведенные выше. Прямые линии показывают движение осциллятора и последовательные точки поворота w_1, w_2, w_3, \dots . Ясно теперь, что существует предельный цикл, имеющий последовательные точки поворота $w_1 (< 1)$ и $w_2 (> 1)$, которые не меняются с течением времени. Для этого предельного цикла в максимуме расширения отводится такое же количество энергии, какое поступает в максимуме сжатия.

С помощью подходящего выбора значений E_0, C_0, E_2 и C_2 авторам удалось

получить хорошее согласие с траекторией в фазовой плоскости для звезды δ Цефея.

В целом рассмотренная модель очень наглядна, особенно с математической точки зрения.

13.3. Модель Стеллингверфа

Модель Стеллингверфа [545] является, по существу, развитием и обобщением однозонной модели Бейкера и обладает некоторыми свойствами модели Радда — Розенберга. Стеллингверф [545] провел как линейные, так и нелинейные расчеты колебаний своей модели.

Модель Стеллингверфа отличается от однозонной модели Бейкера в двух главных аспектах. Во-первых, соотношение между плотностью ρ газа в слое и радиусом r тонкой свободно растяжимой мембраны, которая удерживает газ, такое же, как в модели Радда — Розенберга [см. формулы (13.27) и (13.28)]. Следовательно, в линейной теории соотношение между относительными вариациями $\delta\rho/\rho$ плотности газа (ниже мы будем отбрасывать индекс 0 у равновесных величин) и относительными радиальными смещениями $\delta r/r$ мембраны имеет в данном случае вид $\delta\rho/\rho = -m\delta r/r$, где $m (\geq 3)$ полностью определяется отношением n_0 равновесного радиуса мембраны к радиусу жесткого ядра [см. выражение (13.28')]. В однозонной модели Бейкера $m = 3$.

Во-вторых, Стеллингверф в явном виде учитывает вариацию δL_i светимости на нижней границе слоя. Кроме того, он пренебрегает выделением термоядерной энергии ($\epsilon = 0$) и использует следующее приближение:

$$\delta(\epsilon - \partial L / \partial m) = - (L_0 / \Delta m) (\delta L_r / L_r - \delta L_i / L_0), \quad (13.34)$$

где Δm — масса слоя, L_0 — равновесная светимость модели, а $\delta L_r / L_r$ — относительная вариация светимости на верхней границе слоя. Стеллингверф использует такой же закон непрозрачности, как в однозонной модели Бейкера, и поэтому в линейной теории относительные вариации непрозрачности определяются выражением (13.2). Вследствие того, что рассматривается только лучистый перенос, $\delta L_r / L_r$ в линейной теории дается соотношением (13.18). Кроме того, принимается уравнение состояния идеального газа, т.е. в выражении (13.3) полагается $\chi_p = \chi_T = 1$.

Затем Стеллингверф пренебрегает пространственными производными остальных пульсационных переменных, объединяет линеаризованные уравнения и получает кубическое уравнение для собственной частоты ω (все пульсационные переменные зависят от времени по закону $e^{i\omega t}$). Это кубическое уравнение совершенно аналогично уравнению, полученному Бейкером [31], за исключением отмеченных выше обобщений. Стеллингверф вводит параметр неадиабатичности ζ , который следующим образом связан с параметром неадиабатичности Бейкера K_B [см. формулу (13.9)]:

$$K_B = \zeta(3\Gamma_1 - 4)^{1/2} / [\pi(\Gamma_3 - 1)] \approx \zeta. \quad (13.35)$$

Коэффициент пропорциональности обычно близок к единице, поэтому $\zeta \ll 1$

соответствует адиабатическому пределу, $\xi \gg 1$ — неадиабатическому пределу, а $\xi \sim 1$ — промежуточному случаю умеренных отклонений от адиабатичности.

На основе кубического уравнения Стеллингверф получает затем необходимые условия устойчивости, требуя, чтобы $\text{Re}(s) < 0$. При этом он принимает $\delta L_i = 0$. Условие динамической устойчивости оказывается следующим:

$$m\Gamma_1 - 4 > 0; \quad (13.36)$$

оно является вполне естественным обобщением условия Бейкера (13.11). Условие вековой устойчивости имеет вид

$$4 + mn + (m - 4)(s + 4) > 0 \quad (13.37)$$

и при $m = 3$ сводится к условию (13.15) (напомним, что Стеллингверф принимал $\chi_p = \chi_T = 1$). Наконец, условие пульсационной устойчивости таково:

$$4(\Gamma_3 - 1) + [s(\Gamma_3 - 1) - n] - 4/m = \Lambda' > 0; \quad (13.38)$$

это соотношение служит и определением величины Λ' . При $m = 3$ это условие сводится к условию Бейкера (13.17). Неравенства (13.36) и (13.38) остаются справедливыми также и при $\chi_p \neq \chi_T \neq 1$. И наконец, вариации светимости в квазиадиабатическом приближении определяются из соотношения (13.18)

$$(\delta L_r/L_r)_{ad} = \Lambda'(\delta\rho/\rho). \quad (13.39)$$

Физическая интерпретация всех трех основных членов в левой части неравенства (13.38) точно такая же, как в однозонной модели Бейкера. Однако, поскольку $m \geq 3$, «эффект радиуса» в модели Стеллингверфа может быть меньше, чем в модели Бейкера.

Как указал Стеллингверф [549, 550], вследствие относительно малых значений m для звезд типа δ Щита и β Цефея у них механизм скачка непрозрачности оказывается более эффективным, чем у звезд с высокой концентрацией вещества к центру, таких, как цефеиды, для которых m относительно велик.

Кроме того, ясно, что проведенный в разд. 13.1 анализ однозонной модели Бейкера с помощью интеграла S полностью применим и к модели Стеллингверфа. Следовательно, соответствующее обобщение условия (13.23) для пульсационной устойчивости (если $\delta L_i = 0$) заключается лишь в замене цифры 3 в этом выражении на m .

Вероятно, одним из наиболее интересных моментов в статье Стеллингверфа [545] является обсуждение фазового запаздывания в его модели. В наших обозначениях это обсуждение можно представить следующим образом.

Используя уравнение (13.18) для вариаций светимости в случае лучистого переноса, можно выразить величину $\delta L_r/L_r$ через m , n , $\delta\rho/\rho_0$ и $\delta T/T$. С другой стороны, $\delta T/T$ определяется уравнением энергии (5.346) с учетом того, что все пульсационные переменные зависят от времени по закону $\exp[i\omega t]$. Используя в уравнении энергии приближение и записывая $\omega = 2\pi/\Pi$ (Π — период), можно выразить $\delta T/T$ через Γ_3 , ξ (параметр неадиабатично-

сти Стеллингверфа), $\delta L_r/L_r$ и $\delta L_r/L_0$. Исключая из обоих этих уравнений $\delta T/T$ и разрешая полученное уравнение относительно $\delta L_r/L_r$, имеем

$$\delta L_r/L_r = \{2\pi i/[2\pi i + (s+4)\zeta]\}(\delta L_r/L_r)_{ad} + (s+4)\zeta/[2\pi i + (s+4)\zeta](\delta L_r/L_0). \quad (13.40)$$

Это уравнение связывает относительные вариации $\delta L_r/L_r$, энергии, теряемой в единицу времени в виде излучения, выходящего с внешней границы слоя, с квазиадиабатической оценкой $(\delta L_r/L_r)_{ad}$ [см. соотношение (13.39)] и с относительными вариациями $\delta L_r/L_0$ энергии, приходящей в единицу времени на нижнюю границу слоя; последние совпадают с относительными вариациями энергии, выходящей из жесткого ядра.

Рассмотрим сначала случай $\delta L_i = 0$ (постоянная светимость на нижней границе слоя). Тогда из (13.40) следует, что в адиабатическом пределе ($\zeta \rightarrow 0$)

$$\delta L_r/L_r \rightarrow (\delta L_r/L_r)_{ad}. \quad (13.41)$$

Если же, кроме того, слой способствует возбуждению пульсаций, то $\Lambda' < 0$ (см. выше) и $(\delta L_r/L_r)_{ad}$ будет достигать максимума при минимуме $\delta\rho/\rho$ [излучение запирается в слое, когда оно сильнее всего сжат; см. разд. 9.1 и соотношение (13.39)]. Если под «фазовым запаздыванием» понимать отставание по фазе максимального значения $\delta L_r/L_r$ относительно минимального $\delta r/r$, то в рассматриваемом случае фазовое запаздывание составляет 180° .

Для промежуточного значения ζ , скажем $\zeta = 2\pi/(s+4) \approx 1$, имеем

$$\delta L_r/L_r = [i/(i+1)](\delta L_r/L_r)_{ad}. \quad (13.42)$$

Если $\Lambda' < 0$ (слой пульсационно неустойчив), то $(\delta L_r/L_r)_{ad} < 0$ при $\delta\rho/\rho > 0$, и данный случай соответствует фазовому запаздыванию на 135° .

Наконец, в неадиабатическом пределе ($\zeta \gg 1$) имеем

$$\delta L_r/L_r \rightarrow [2\pi i/(s+4)\zeta](\delta L_r/L_r)_{ad} \rightarrow 0. \quad (13.43)$$

Если $\Lambda' < 0$, то этот случай соответствует фазовому запаздыванию на 90° при исчезающе малых вариациях светимости (последнее обстоятельство отражает эффект неизменности вариаций светимости в пространстве (см. разд. 9.1)).

Таким образом, в рассматриваемом случае, когда $\delta L_i = 0$ и слой возбуждает пульсации ($\Lambda' < 0$), вариации выходящего излучения (если представлять их в виде вектора в комплексной плоскости, положительная вещественная полуось которой направлена вдоль $\delta\rho/\rho$, или $-\delta r/r$) лежат в третьем квадранте. Если $\zeta \ll 1$, то вектор $\delta L_r/L_r$ почти совпадает с отрицательной вещественной полуосью, его величина приблизительно равна $|(\delta L_r/L_r)_{ad}|$. При увеличении ζ этот вектор вращается против часовой стрелки и укорачивается, асимптотически приближаясь при больших ζ к отрицательной мнимой полуоси и уменьшаясь при этом до нуля по абсолютной величине.

Можно отметить, что для заданных массы и равновесной светимости условные $\zeta \ll 1$ соответствует высоким, а $\zeta \gg 1$ — низким эффективным температурам.

Рассмотрим теперь случай $\delta L_i \neq 0$. Если предположить, что все затухание происходит в более глубоких относительно исследуемого слоя областях, то $\delta L_i/L_0$ должно быть максимально примерно при наибольшем значении $\delta\rho/\rho$. Предположим, следуя Стеллингверфу, что это условие выполняется, так что вектор $\delta L_i/L_0$ в точности совпадает с положительной вещественной полуосью комплексной плоскости. Тогда при $\zeta \ll 1$ вектор, представленный вторым членом в правой части соотношения (13.40), направлен почти точно вдоль отрицательной мнимой полуоси и имеет очень малую величину $|(s + 4)\zeta/(2\pi i)|\delta L_i/L_0$. С ростом ζ он вращается против часовой стрелки и увеличивается, асимптотически приближаясь при больших ζ к положительной вещественной полуоси, на которой его величина становится равной $|\delta L_i/L_0|$. Следовательно, этот вектор всегда лежит в четвертом квадранте (рис. 13.3).

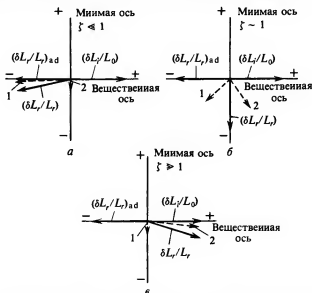


рис. 13.3. Относительная вариация светимости $\delta L_i/L_r$ на внешней границе однозонной модели Стеллингверфа. Предполагается, что относительная вариация плотности $\delta\rho/\rho$ (или $-\delta r/r$) описывается вектором, направленным вдоль положительной вещественной полуоси (не показан). Квазиadiaбатическая вариация светимости $(\delta L_i/L_r)_{ad}$ и относительная вариация светимости $(\delta L_i/L_0)$ на внутренней границе модели представлены сплошными векторами, направленными соответственно вдоль отрицательной и положительной вещественной полуоси. Изображенная ситуация соответствует возбуждению пульсаций в слое и затуханию в недрах (см. текст). Символами 1 и 2 обозначены соответственно первый и второй члены в правой части уравнения (13.40), показанные штриховыми векторами. Сплошные векторы обозначают $\delta L_i/L_r$, т.е. сумму штриховых векторов. Все векторы схематически соответствуют случаям: а — малым отклонениям от адиабатичности, $\zeta \ll 1$; б — промежуточной неadiaбатичности, $\zeta \sim 1$; в — сильной неadiaбатичности, $\zeta \gg 1$, где ζ — параметр неadiaбатичности Стеллингверфа [формула (13.35)].

Рассматривая затем векторную сумму обоих членов в правой части уравнения (13.40), мы видим, что в адиабатическом пределе ($\xi \ll 1$) $\delta L/L_r \approx (\delta L/L_r)_{\text{ад}}$ и имеет знак, противоположный $\delta\rho/\rho$ (вариации светимости на внутренней границе не влияют на вариации выходящего излучения). В неадиабатическом пределе ($\xi \gg 1$) $\delta L/L_r \approx \delta L/L_0$ и имеет тот же знак, что и $\delta\rho/\rho$ (вариации выходящего излучения соответствуют вариациям светимости на внутренней границе; теплоемкость слоя настолько мала, что газ в нем не может модулировать проходящий сквозь него поток излучения). Для промежуточных значений ($\xi \sim 1$) величина $\delta L/L_r$ определяется суммой двух векторов, один из которых лежит в третьем квадранте, а другой — в четвертом. В этом случае результирующий вектор будет лежать, очевидно, ближе к отрицательной мнимой полуоси, т.е. будет иметь фазовое запаздывание ближе к 90° , чем любой из двух векторов по отдельности, что и показано на рис. 13.3. При подходящих длинах этих векторов результирующий вектор в случае $\xi \sim 1$ может оказаться вблизи отрицательной мнимой полуоси. Стеллингверф приводит доводы в пользу того, что длины указанных векторов действительно таковы, что при $\xi \sim 1$ результирующий вектор соответствует фазовому запаздыванию, очень близкому к 90° , если длина вектора $(\delta L/L_0)$ выбирается такой, чтобы затухание в недрах приблизительно уравнивалось возбуждением в слое.

Таким образом, в модели Стеллингверфа фазовое запаздывание вариаций выходящего излучения примерно на 90° обусловлено совместным действием затухания в недрах и возбуждения в слое. А это как раз те условия, которые требуются в упрощенной картине фазового запаздывания, представленной Кастором (гл. 11).

Стеллингверф [545] провел также нелинейные расчеты для своей модели. Они удивительно точно подтвердили предполагаемые оценки, полученные на основе линеаризованного подхода (см. выше), а также выявили другие свойства, которые мы здесь не будем подробно рассматривать. Однако можно отметить, что в модели Стеллингверфа отсутствует какое-либо «насыщение» механизма возбуждения: предполагается, что все затухание происходит в более глубоких относительно исследуемого слоя областях звезды. Поэтому в отличие от модели Радда — Розенберга модель Стеллингверфа не имеет «встроенного механизма» ограничения амплитуды пульсаций.

Тем не менее рассчитанные Стеллингверфом кривые блеска в некоторых случаях качественно очень сходны с реальными кривыми блеска многих цефеид и переменных типа RR Лир (см., например, [429]).

Неясно, какие детали реальных кривых блеска можно во всех случаях связать (как в модели Стеллингверфа) непосредственно с физическими свойствами простой однозонной модели. Но тем не менее такая модель поучительна и дает, по-видимому, ряд полезных разъяснений, касающихся физической сущности явления пульсаций.

13.4. Модель Кастора

Основной целью модели Кастора [67] (эти неопубликованные заметки используются с любезного согласия автора) было исследование проблемы

ограничения амплитуды в системах с мягким самовозбуждением (смысл термина «мягкий» разъяснен в разд. 5.1). Детальные численные расчеты показали (ссылки см., например, в [133]), что такое ограничение амплитуды является типичной (если не исключительной) особенностью расчетов и, по-видимому, имеет место в реальных звездах.

Сначала Кастор на основе общего нелинейного уравнения энергии [см., например, (4.52)] отмечает, что при адиабатическом движении [когда правая часть уравнения (4.52) равна нулю] возможны пульсации с произвольной амплитудой. Поэтому он делает вывод, что главные физические причины ограничения амплитуды следует искать, вероятно, в нелинейности неадиабатической части движения. Это заключение согласуется с действием механизма ограничения амплитуды в модели Радда — Розенберга (разд. 13.2).

Далее Кастор отмечает, что общее нелинейное неадиабатическое уравнение третьего порядка в частных производных, описывающее движение сферической поверхности с заключенной внутри нее массой m [уравнение (6.13)], содержит в правой части все явные неадиабатические эффекты. Поэтому он предлагает линеаризовать, по существу, только левую часть этого уравнения, а правую часть разложить на линейный член и член более высокого порядка, в качестве которого он выбирает член третьего порядка малости.

Для простоты Кастор отбрасывает пространственные производные в левой части уравнения (6.13), т.е. фактически использует однозонную модель. Полученное им дифференциальное уравнение третьего порядка (по времени) имеет такой же вид, как уравнение (13.49). Кастор исследует это уравнение с помощью метода двухмасштабных разложений, описанного в [107].

Следуя Кастору, мы также примем здесь однозонную модель, а именно модель, подобную изученной Ашером и Унтни [596] и Раддом и Розенбергом [470]. Уравнение движения модели идентично уравнению (13.24).

Продифференцируем уравнение (13.24) по времени и исключим производную dP/dt с помощью уравнения энергии, например, в форме (4.30а), где dq/dt дается формулой (4.40). Производную $d\rho/dt (= \dot{\rho})$ выразим через $dr/dt (= \dot{r})$, используя соотношение

$$\dot{\rho}/\rho = -m(r)\dot{r}/r, \quad (13.44)$$

где

$$m(r) = [3n_0^3/(n_0^3 - 1)](r/r_0)^3(\rho/\rho_0), \quad (13.45)$$

а $n_0 = r_0/r_c$ — отношение равновесного, или статического, радиуса свободно растяжимой внешней мембраны к радиусу жесткого ядра (мы используем здесь те же обозначения, что и в разд. 13.2). В результате получаем следующее нелинейное уравнение:

$$\begin{aligned} \ddot{r} + \ddot{r}[m(r)\Gamma_1 - 2]/r + \dot{r}[m(r)\Gamma_1 - r]GM/\dot{r}^3 = \\ = (4\pi r^2/\mathcal{M})\rho(\Gamma_3 - 1)(\varepsilon - \delta L/\partial m), \end{aligned} \quad (13.46)$$

где \mathcal{M} — масса газа в зоне (ср. с разд. 13.2), а m в правой части (и только в этом уравнении) — массовая переменная. Уравнение (13.46) служит для на-

шей одиозонной модели аналогом уравнения (6.13). Видно, что все явные неадиабатические эффекты содержатся в правой части уравнения.

Теперь, в соответствии с выводами Кастора (см. выше), линеаризуем только левую часть уравнения (13.46). При этом будем считать, что невозмущенная модель находится в гидростатическом равновесии ($\dot{r}_0 = 0$) и что показатель адиабаты $\Gamma_1 = \text{const}$. Одновременно определим характеристическую угловую частоту ω_0 :

$$\omega_0 = [(m_0 \Gamma_1 - 4)GM/r_0^3]^{1/2}, \quad (13.47)$$

где m_0 — значение m для невозмущенной модели. Предположим, что $\Gamma_1 \geq 4/m_0$, тогда ω_0 чисто вещественно. Наконец, введем новое безразмерное время

$$t' = \omega_0 t. \quad (13.48)$$

Используя t' в качестве временной переменной, мы тем самым измеряем время в единицах $\Pi/2\pi$ (период $\Pi = 2\pi/\omega_0$); другими словами, мы рассматриваем единичную безразмерную угловую частоту.

Следуя Кастору, разложим теперь правую часть уравнения (13.46) на линейный член и член третьего порядка относительно $\xi = \delta r/r$. Опуская здесь и далее штрихи у новой временной переменной, мы можем записать уравнение (13.46) в следующем виде:

$$d^3\xi/dt'^3 + d\xi/dt' + \varepsilon(\xi - Q\xi^3) = 0, \quad (13.49)$$

где безразмерная величина ε предполагается малой (не путать со скоростью генерации термоядерной энергии на единицу массы), а Q — параметр, значение которого определяет вклад кубического члена (Кастор использовал $Q = 1$). Уравнение (13.49) имеет тот же вид, что и уравнение, изученное Кастором (см. выше). Займемся теперь исследованием его решений, предельных циклов и т.д.

Сначала рассмотрим линейный режим, характеризуемый тем, что $Q = 0$ и $|\varepsilon| \ll 1$. Предполагая, что $\xi \propto \exp[i\omega t']$, получаем из (13.49) кубическое уравнение относительно ω , которое имеет следующие решения:

$$\omega = \pm 1 - i\varepsilon/2 + O(\varepsilon^2). \quad (13.50)$$

В этом случае решение уравнения (13.49) показывает, что при $\varepsilon > 0$ пульсации самовозбуждаются, т.е. зона колебательно неустойчива (такой случай нам уже известен; см. гл. 9).

Важно отметить здесь, что колебания происходят с одним характерным временем $t \sim 1$, а нарастание колебаний — с другим $\varepsilon t \sim 1$. Поэтому, следуя Кастору (см. выше), мы введем в явном виде две временные переменные, как в работе [107], и рассмотрим их как две независимые переменные. Одна из них — обычное время пульсаций t , а другая — мера нарастания амплитуды; обозначим ее \tilde{t} и определим соотношением

$$\tilde{t} = \varepsilon t. \quad (13.51)$$

Допустим теперь, что ξ можно представить в виде ряда

$$\xi = F_0(t, \tilde{t}) + \varepsilon F_1(t, \tilde{t}) + O(\varepsilon^2), \quad (13.52)$$

где все $F_i(t, \tilde{t})$ предполагаются периодическими по t . С помощью уравнения (13.52) можно выразить величины ξ , $d\xi/dt$ и т.д. через F_0 , $\partial F_0/\partial t$, $\partial F_0/\partial \tilde{t}$, ... и F_1 , $\partial F_1/\partial t$, $\partial F_1/\partial \tilde{t}$, ... и т.д. Тогда дифференциальное уравнение (13.49) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \partial^3 F_0/\partial t^3 + \partial F_0/\partial t + \varepsilon(3\partial^3 F_0/\partial t^2 \partial \tilde{t} + \partial F_0/\partial \tilde{t} + \\ + F_0 - QF_0^3 + \partial^3 F_1/\partial t^3 + \partial F_1/\partial t) + O(\varepsilon^2) = 0. \end{aligned} \quad (13.53)$$

Последовательно приравнивая теперь коэффициенты при ε^0 , ε^1 и т.д. нулю, получаем следующую систему уравнений

$$\partial^3 F_0/\partial t^3 + \partial F_0/\partial t = 0, \quad (13.54)$$

$$\partial^3 F_1/\partial t^3 + \partial F_1/\partial t = -3\partial^3 F_0/\partial t^2 \partial \tilde{t} - \partial F_0/\partial \tilde{t} - F_0 + QF_0^3 \quad (13.55)$$

и так далее.

Уравнение (13.54) описывает линейные адиабатические колебания. Его общее решение имеет вид

$$F_0 = A(\tilde{t})\cos t + B(\tilde{t})\sin t + C(\tilde{t}), \quad (13.56)$$

где коэффициенты A , B и C в общем случае зависят только от \tilde{t} . Уравнение (13.56) можно также записать в виде

$$F_0 = R^{1/2}(\tilde{t})\cos[t + \phi(\tilde{t})] + C(\tilde{t}), \quad (13.57)$$

где

$$R = A^2 + B^2, \quad (13.58)$$

а ϕ — фаза (не имеющая конкретного физического смысла), значение которой зависит от значений A и B . Идея метода состоит в том, чтобы использовать выражение (13.56) для вычисления правой части уравнений (13.55), и т.д.

Таким образом можно вычислить F_0 , F_0^3 , а также различные частные производные от F_0 , и они включают в себя произведения $\cos^0 t$, $\cos^1 t$, $\cos^2 t$ или $\cos^3 t$ и $\sin^0 t$, $\sin^1 t$, $\sin^2 t$ или $\sin^3 t$. С помощью тригонометрических тождеств (приведенных в [107, p. 92]) можно выразить эти степени и произведения через тригонометрические функции от величин, кратных t . Подставляя эти выражения в дифференциальное уравнение (13.55), получаем

$$\begin{aligned} \partial^3 F_1/\partial t^3 + \partial F_1/\partial t = 2(dA/d\tilde{t})\cos t + 2(dB/d\tilde{t})\sin t - dC/d\tilde{t} - \\ - A\cos t - B\sin t - C + 3Q[\frac{1}{4}A^3 + \frac{1}{4}AB^2 + AC^2]\cos t + \\ + 3Q[\frac{1}{4}B^3 + \frac{1}{4}A^2B + BC^2]\sin t + Q[\frac{1}{2}A^2C + \frac{1}{2}B^2C + C^3] + \\ + \frac{1}{4}Q[A^3 - 3AB^2]\cos 3t + \frac{1}{4}Q[A^2B - B^3]\sin 3t + \frac{1}{2}Q[A^2C - B^2C]\cos 2t + \\ + 3QABC\sin 2t. \end{aligned} \quad (13.59)$$

Далее, если бы коэффициенты в уравнении (13.59) при $\cos t$, $\sin t$ и членах, не зависящих от t , в совокупности не обращались в нуль, то величина F_1 не

была бы периодической по t , как предполагается. С другой стороны, коэффициенты при $\cos 3t$, $\sin 3t$, $\cos 2t$ и $\sin 2t$ в правой части (13.59) не обязательно обращаются в нуль.

Таким образом, приравнивание нулю суммы коэффициентов при $\cos t$, $\sin t$ и членах, не зависящих от t в правой части уравнения (13.59), дает три условия для периодичности величины F_1 по t . Эти три условия представляют собой три дифференциальных уравнения относительно \tilde{t} для трех величин $A(\tilde{t})$, $B(\tilde{t})$, и $C(\tilde{t})$ [см. выражение (13.56)]. Два из этих дифференциальных уравнений легко объединить в одно относительно величины $R(\tilde{t})$, определенной соотношением (13.58). В результате имеем два следующих дифференциальных уравнения:

$$dR/d\tilde{t} - R + 3Q[R^2/4 + RC^2] = 0, \quad (13.60)$$

$$dC/d\tilde{t} + C - Q[3/2 RC + C^3] = 0. \quad (13.61)$$

Эти уравнения описывают нарастание колебаний с точностью до 1-го порядка относительно ε .

Осциллятор будет совершать установившиеся колебания (предельный цикл), если $dR/d\tilde{t} = 0$ и $dC/d\tilde{t} = 0$, и в таком случае движение будет строго периодическим, а нарастание колебаний прекратится. Существуют четыре решения уравнений (13.60) и (13.61) при $dR/d\tilde{t} = 0$ и $dC/d\tilde{t} = 0$, которые соответствуют (в принципе) четырем предельным циклам:

$$I. R = 0, C = 0,$$

$$II. C = 0, R = 4/(3Q);$$

$$III. R = 0, C = \pm 1/Q^{1/2};$$

$$IV. R = 8/(15Q), C = \pm 1/(5Q)^{1/2}.$$

Предельный цикл I представляет собой статический случай ($\xi = 0$). Очевидно, что этот случай является предельным циклом, хотя и вырожденным. Предельный цикл III соответствует случаю постоянного смещения, что непосредственно следует из исходного дифференциального уравнения (13.49).

Но являются ли все эти четыре предельных цикла устойчивыми? Если какой-либо из них неустойчив, то он осуществляется в природе лишь на некоторое время, если вообще осуществляется. Чтобы исследовать устойчивость предельных циклов, вернемся к дифференциальным уравнениям (13.60) и (13.61) для скоростей изменения, характеризующих амплитуду параметров R и C , и линеаризуем их относительно соответствующих значений R и C для предельных циклов (инже будем обозначать эти предельные значения индексом 0). Полученные линеаризованные уравнения запишем в виде одного матричного уравнения

$$dX/d\tilde{t} = \mathcal{A}X, \quad (13.62)$$

где

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \delta R \\ \delta C \end{pmatrix}, \quad (13.63)$$

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}QR_0 - 3QC_0^2 & -6QR_0C_0 \\ \frac{1}{2}QC_0 & -1 + \frac{1}{2}QR_0 + 3QC_0^2 \end{pmatrix}. \quad (13.64)$$

Величина δR , например, — это разность между реальным значением R и значением R_0 для предельного цикла.

Определяя затем собственные значения матрицы \mathcal{N} , получаем ответ на вопрос об устойчивости предельных циклов. Если V_i — собственный вектор матрицы \mathcal{N} , соответствующий собственному значению λ_i , то

$$\mathcal{N}V_i = \lambda_i V_i. \quad (13.65)$$

Решение уравнения (13.62) для произвольного момента времени \tilde{t} равно

$$X(\tilde{t}) = \sum \alpha_i V_i \exp[\lambda_i \tilde{t}], \quad (13.66)$$

где α_i — постоянные коэффициенты (мы пренебрегаем здесь возможностью того, что некоторые λ_i могут быть равны друг другу; в таком случае соответствующие величины $\alpha_i V_i$ следовало бы заменить полиномами по \tilde{t}). Собственные значения матрицы \mathcal{N} получаются из решения характеристического уравнения

$$|\mathcal{N} - \lambda \mathcal{A}| = 0, \quad (13.67)$$

где прямые скобки означают определитель соответствующей матрицы, причем λ — это число, а \mathcal{A} — единичная матрица. Если в уравнение (13.67) подставить выражение (13.64) для матрицы \mathcal{N} , то получается простое квадратное уравнение относительно собственного значения λ . Решение этого уравнения имеет вид

$$\lambda = \pm (1 - 3QR_0 + \frac{1}{2}Q^2R_0^2 - 6QC_0^2 + 9Q^2C_0^4)^{1/2}. \quad (13.68)$$

Корни уравнения (13.67) либо чисто вещественные, либо чисто мнимые. Следует отметить, что существование положительного вещественного значения λ сразу означает неустойчивость.

Можно показать, что устойчивым является только предельный цикл IV, и, по-видимому, именно он может осуществляться в природе (если $\varepsilon > 0$). С точностью до первого порядка относительно ε этот предельный цикл характеризуется смещением

$$\xi = (8/15Q)^{1/2} \cos(t + \phi) \pm 1/(5Q)^{1/2} + \varepsilon F_1(t, \tilde{t}), \quad (13.69)$$

где F_1 определяется, как и выше, членами ближайшего более высокого порядка по ε .

Отметим, что ε вообще не появляется в нулевом приближении предельного цикла; ε определяет только время ($\sim \varepsilon^{-1}$ периодов), необходимое для достижения этого предельного цикла. Отметим также, что, как и следует ожидать, предельный цикл зависит от Q (коэффициента, определяющего вклад членов третьего порядка в выражении для ξ): амплитуда предельного цикла увеличивается с уменьшением Q . Наконец, укажем, что с точностью до нулевого порядка относительно ε не происходит никаких изменений периода. Этот результат справедлив только при определенной амплитуде, поскольку,

как отмечено выше, только решение нулевого порядка является решением линейного адиабатического волнового уравнения.

Предельные циклы других осцилляторов были рассмотрены Мелвином в ряде неопубликованных исследований [368].

Конечно, в случае реальной звезды ситуация оказывается несравненно более сложной. Неясно даже, насколько хорошо рассмотренная однозонная модель (или вообще любая однозонная модель) описывает реальную звезду. Единственной точкой соприкосновения с действительностью служит, вероятно, то, что в моделях реальных пульсирующих звезд, по-видимому, часто устанавливается режим колебаний типа предельного цикла. Устойчивость подобных режимов исследовал Стеллингверф [546, 547].

Часть III

НЕРАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЗВЕЗД

В этой части мы будем изучать более общие виды колебаний, чем чисто радиальные пульсации, рассмотренные в ч. II. Смещение типичного элемента массы из невозмущенного положения может теперь происходить в произвольном направлении, а не обязательно вдоль радиус-вектора, проведенного из центра звезды. Поэтому для полного определения такого смещения требуются три числа вместо одного, достаточного в простом случае чисто радиальных пульсаций. В результате теория нерадиальных колебаний оказывается значительно более сложной, чем теория радиальных пульсаций. В основном по этой причине первая из теорий разработана гораздо менее детально, чем вторая. Однако благодаря своей общности теория нерадиальных колебаний потенциально дает значительно лучшее приближение к реальным колебаниям звезд, и поэтому она гораздо эффективнее, чем более простая и ограниченная теория чисто радиальных пульсаций. Например, в рамках данной теории могут быть учтены такие эффекты (например, вращение или магнитные поля звезд), которые, возможно, приводят к появлению в звезде некоторого предположительного направления.

Однако в этой части книги мы будем заниматься в основном звездами, в которых подобные эффекты отсутствуют. (Некоторые эффекты вращения, магнитных полей и т.п. будут описаны в гл. 19.) Таким образом, в данной части мы рассмотрим главным образом те звезды, которые в невозмущенном (неосциллирующем) состоянии являются сферически симметричными, находятся в состоянии покоя и гидростатического равновесия и не обладают крупномасштабными магнитными полями. Кроме того, мы будем пренебрегать молекулярной и лучистой вязкостью и турбулентностью, а также будем предполагать, что применимы уравнения нерелятивистской механики и ньютоновской теории тяготения.

В гл. 14 — 16 мы приведем довольно общие свойства нерадиальных звездных колебаний. Так, в гл. 14 будет выведено нелинейное векторное уравнение третьего порядка (по времени) в частных производных, которое описывает нелинейные нерадиальные неадиабатические движения. В остальных же главах этой части, за исключением некоторых разделов гл. 19, мы будем рассматривать только такие колебания, которые настолько малы, что применима линейная теория (гл. 5).

Если колебания предполагаются еще и адиабатическими, то уравнения можно объединить в одно линейное адиабатическое волновое уравнение, ко-

торое является обобщением на иерадимальные колебания соответствующего уравнения радиальных пульсаций (гл. 8). В гл. 15 будет показано, что это уравнение можно записать в операторной форме, причем оператор, входящий в это уравнение, оказывается самосопряженным, как и в случае радиальных пульсаций. Это линейное адиабатическое волновое уравнение, которое, как и в прошлом, служит основой большинства исследований, посвященных иерадимальным колебаниям звезд, будет подробно рассмотрено в гл. 17. Поскольку эта глава написана в основном в 1976 — 1977 гг., она не отражает более поздних результатов, представленных, например, в статьях Кристенсен-Далсгаарда [86], Сибахаси [507] и Вольфа [626] или в книге Унио и др. [593].

В гл. 16 мы покажем, что линеаризованное уравнение энергии (гл. 9) применимо не только к радиальным, но и к иерадимальным колебаниям звезд. В этой главе мы покажем также, что к иерадимальным колебаниям применимы и интегральные выражения типа полученных в гл. 9 для радиальных пульсаций. Конечно, всюду в этой главе необходимо сохранять в уравнениях неадиабатические члены, которые в гл. 15 и 17 отбрасываются. Результаты гл. 16 служат обоснованием общепринятых методов оценки вибрационной устойчивости иерадимальных колебаний звезд.

В гл. 18 мы рассмотрим в рамках линейной теории задачу иерадимальных неадиабатических звездных пульсаций. И наконец, в гл. 19 мы коротко остановимся на некоторых разнообразных вопросах теории звездных пульсаций, как радиальных, так и иерадимальных.

В 1979 г. Унио, Осаки, Андо и Сибахаси опубликовали прекрасную монографию [593] о иерадимальных колебаниях звезд.

ГЛАВА 14

ОБЩЕЕ НЕЛИНЕЙНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В этой главе мы объединим уравнения неразрывности, импульса и энергии в одно нелинейное векторное дифференциальное уравнение третьего порядка (по времени) в частных производных, которое описывает общие нелинейные неадиабатические движения в сплошной невязкой среде. Хотя это уравнение мало пригодно для изучения звездных пульсаций, само его существование заслуживает внимания. Оно является иерадимальным аналогом уравнения (6.13) для чисто радиальных движений.

Начнем с уравнения импульса в представлении Эйлера [см. уравнение (4.17)], в котором использовано предположение, что тензор напряжений сводится к чисто гидростатическому термодинамическому давлению (разд. 4.2в). Разделив (4.17) на плотность ρ , подействуем на все члены этого уравнения оператором субстанциональной производной и получим

$$d^2 \mathbf{v} / dt^2 = \rho^{-2} (d\rho / dt) \nabla P - \rho^{-1} d(\nabla P) / dt + d\mathbf{f} / dt. \quad (14.1)$$

С помощью операторного соотношения (4.1) можно записать

$$\frac{d}{dt} (\nabla P) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla P) + \mathbf{v} \cdot \nabla (\nabla P) = \nabla (\partial P / \partial t) + \mathbf{v} \cdot \nabla (\nabla P). \quad (14.2)$$

Последний член этого выражения исключим с помощью тождества

$$\nabla(\mathbf{v} \cdot \nabla P) = \mathbf{v} \cdot \nabla(\nabla P) + (\nabla P) \cdot \nabla \mathbf{v} + (\nabla P) \times (\nabla \times \mathbf{v}). \quad (14.3)$$

Один из членов этого тождества можно объединить с первым членом в последнем равенстве в (14.2), и полученное выражение опять с учетом операторного соотношения (4.1) будет включать dP/dt вместо $\partial P/\partial t$. Далее, dP/dt можно исключить с помощью уравнения энергии в форме (4.30а) [см. также (4.40)]. В результате получаем

$$\begin{aligned} d^2\mathbf{v}/dt^2 = & \rho^{-2}(d\rho/dt)\nabla P - \rho^{-1}\nabla[(\Gamma_1 P/\rho)d\rho/dt] - \\ & - \rho^{-1}\nabla[\rho(\Gamma_3 - 1)(\varepsilon - \rho^{-1}\nabla \cdot \mathbf{F})] + \rho^{-1}(\nabla P) \cdot \nabla \mathbf{v} + \rho^{-1}(\nabla P) \times (\nabla \times \mathbf{v}) + d\mathbf{f}/dt. \end{aligned} \quad (14.4)$$

Величины $\rho^{-1}(\nabla P)$ и $\rho^{-1}(d\rho/dt)$ можно исключить, используя соответственно уравнение импульса (4.17) и уравнение неразрывности (4.5). Таким образом, уравнение (14.4) можно записать окончательно в следующем виде:

$$\begin{aligned} d^2\mathbf{v}/dt^2 - (d\mathbf{v}/dt - \mathbf{f}) \cdot [(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbb{I} - \nabla \mathbf{v}] + \\ + (d\mathbf{v}/dt - \mathbf{f}) \times (\nabla \times \mathbf{v}) - \rho^{-1}\nabla(\Gamma_1 P \nabla \cdot \mathbf{v}) - d\mathbf{f}/dt = \\ = \rho^{-1}\nabla[\rho(\Gamma_3 - 1)(\varepsilon - \rho^{-1}\nabla \cdot \mathbf{F})], \end{aligned} \quad (14.5)$$

где \mathbb{I} — единичный тензор. Это и есть искомое обобщение уравнения (6.13), описывающего радиальное движение, на нерадиальный случай. Отметим, что неадиабатические члены входят только в правую часть уравнения (14.5).

Можно показать, что если \mathbf{f} — сила на единицу массы, обусловленная собственной гравитацией, то в случае чисто радиального движения уравнение (14.5), как и следовало ожидать, сводится к уравнению (6.13).

ГЛАВА 15

САМОСOPЯЖЕННОСТЬ ЛИНЕЙНОГО АДИАБАТИЧЕСКОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В этой главе мы рассмотрим нерадиальные колебания столь малой амплитуды, что к ним применима линейная теория (гл. 5). Кроме того, здесь мы ограничимся анализом колебаний, которые являются еще и адиабатическими. Мы увидим, что при таких предположениях линеаризованные уравнения можно объединить в одно *линейное адиабатическое волновое уравнение*. Оно является нерадиальным аналогом соответствующего уравнения для чисто радиальных колебаний, довольно подробно рассмотренного в гл. 8. Это нерадиальное уравнение обладает рядом интересных и полезных свойств, которые и будут описаны в данной главе.

Нерадиальное линейное адиабатическое волновое уравнение будет выведено в разд. 15.1, где приведены и некоторые другие полезные результаты. Ряд интересных и полезных свойств этого уравнения будет получен и обсужден в разд. 15.2 для одного важного частного случая, который охватывает почти все, что представляет какой-либо интерес для теории нерадиальных звездных колебаний. Еще более общий случай будет кратко рассмотрен в разд. 15.3.

Некоторые выводы, полученные в этом разделе, будут использованы в других главах данной части книги.

15.1. Введение

Напомним сначала линейризованные уравнения неразрывности, импульса и энергии, причем последнее уравнение — для частного случая адиабатических колебаний. Уравнение неразрывности возьмем в форме (5.29б), а уравнение импульса — в форме (5.32). Если единственной объемной силой является собственная гравитация (как мы будем предполагать всюду в данной главе, если не оговорено особо), то полная объемная сила на единицу массы равна $\mathbf{f} = -\nabla\psi$, где ψ — гравитационный потенциал (разд. 4.5). Наконец, линейризованное уравнение энергии для адиабатических колебаний — это уравнение (5.36а).

Каково выражение для эйлеровой вариации ψ' гравитационного потенциала? Прежде всего напомним, что сам гравитационный потенциал является решением уравнения Пуассона (4.42). Решение этого уравнения в интегральной форме дается выражением (4.43). Если теперь каждый элемент массы переместить в новое положение $\mathbf{x} + \delta\mathbf{r}$, то вклад в потенциал в точке (\mathbf{r}, t) элемента массы dm' составит $-Gdm'/|\mathbf{x} + \delta\mathbf{r} - \mathbf{r}|$. Следовательно, новый потенциал в точке (\mathbf{r}, t) также будет определяться выражением (4.43), только вместо \mathbf{x} в знаменателе будет стоять $\mathbf{x} + \delta\mathbf{r}$. Вспоминая смысл эйлеровой вариации и учитывая, что смещение $\delta\mathbf{r}$ бесконечно мало, имеем

$$\psi'(\mathbf{r}, t) = -G \int_V \{ \delta\mathbf{r}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} (|\mathbf{x} - \mathbf{r}|^{-1}) \} \rho_0(\mathbf{x}, t) d\tau', \quad (15.1)$$

где $\nabla_{\mathbf{x}}$ означает, что пространственные производные в операторе градиента следует брать по координатам точки \mathbf{x} . Интегрируя выражение (15.1) по частям и заменяя один из появляющихся объемных интегралов на поверхностный интеграл с помощью теоремы Гаусса — Остроградского, получаем

$$\begin{aligned} \psi'(\mathbf{r}, t) = & -G \oint_S \frac{\rho_0(\mathbf{x}, t) [\delta\mathbf{r}(\mathbf{x}, t)] \cdot d\mathbf{S}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|} + \\ & + G \int_V \frac{\nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\rho_0(\mathbf{x}, t) \delta\mathbf{r}(\mathbf{x}, t)]}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|} d\tau', \end{aligned} \quad (15.2)$$

где первый интеграл берется по полной поверхности S рассматриваемой конфигурации. При этом в соответствии с первоначальным решением (4.43) уравнения Пуассона снаружи от поверхности S всюду должно быть $\rho_0 = 0$.

Важное соотношение (15.2) можно получить также и следующим образом. Взяв эйлерову вариацию от уравнения Пуассона, имеем

$$\nabla^2 \psi' = 4\pi G \rho'. \quad (15.3)$$

Формальное решение этого уравнения записывается в следующем виде:

$$\psi'(\mathbf{r}, t) = -G \int_V \rho'(\mathbf{x}, t) |\mathbf{x} - \mathbf{r}|^{-1} d\tau', \quad (15.4)$$

где $d\tau'$ — элемент объема в точке \mathbf{x} , а интегрирование проводится по всем областям пространства, в которых $\rho' \neq 0$. Однако в более общем случае, когда плотность на поверхности конфигурации не обращается в нуль, но при этом тем не менее существует определенная поверхность, вне которой уже нет вещества (например, в случае жидкого шара или однородной модели звезды), применять выражение (15.4) следует с осторожностью.

В этом случае плотность должна скачкообразно изменяться от некоторого конечного значения непосредственно под воображаемой ограничивающей поверхностью S до нуля с внешней стороны от этой поверхности. Следовательно, эйлерава вариация плотности ρ' , хотя она и может быть малой (скажем, первого порядка малости) всюду достаточно глубоко под поверхностью S , но в непосредственной окрестности S она должна быть относительно велика, скажем нулевого порядка. Эта «непосредственная окрестность» поверхности S должна представлять собой некоторую область в виде тонкого слоя (подобного скорлупе вокруг яйца), содержащего поверхность S и окружающего весь объем V , в пределах которого $\rho > 0$. Для каждого момента времени толщина этого слоя определяется тем, насколько поверхность S отклонилась от своей невозмущенной формы.

Очевидно, что в произвольной точке \mathbf{x} в пределах слоя (но не глубже него) максимальное значение вариации $\rho' \approx \rho_S$ — невозмущенному значению плотности на поверхности.

Поэтому интеграл в выражении (15.4) должен состоять из двух членов: интеграла по полному объему V , где $\rho_0(\mathbf{x}, t) \neq 0$, и интеграла по рассмотренному слою, содержащему поверхность S . В линейной теории величина $\rho'(\mathbf{x}, t)$ всюду внутри объема V имеет первый порядок малости, и поэтому там можно использовать линеаризованное уравнение неразрывности (5.29а); кроме того, в качестве объема V можно взять объем невозмущенной системы. Тогда этот первый интеграл будет совпадать с объемным интегралом в выражении (15.2). Во втором же интеграле мы можем с точностью до первого порядка малости использовать соотношение

$$\rho'(\mathbf{x}, t) d\tau' = \rho_0(\mathbf{x}_0, t) \delta\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}'. \quad (15.5)$$

Здесь \mathbf{x}_0 — невозмущенное положение элемента жидкости, находящегося на поверхности конфигурации, а $\delta\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. При этом подразумевается, что \mathbf{x}_0 — это точка непосредственно под поверхностью S , т.е. ρ_0 в точке \mathbf{x}_0 всегда имеет некоторое конечное значение. Кроме того, $\delta\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}'$ — это элемент объема вблизи точки \mathbf{x} , где вектор $d\mathbf{S}'$ элемента поверхности направлен вдоль внешней нормали. В качестве поверхности S можно взять в первом приближении поверхность невозмущенной конфигурации: тогда второй из рассматриваемых интегралов становится интегралом по (замкнутой) поверхности S и он точно совпадает с поверхностным интегралом в (15.2).

Во многих (практически во всех) случаях, рассматриваемых в данной части, в том числе и в разд. 15.2, плотность ρ_0 на поверхности конфигурации принимается равной нулю. Поэтому поверхностный интеграл в (15.2) обращается в нуль, и мы имеем более простой результат

$$\psi'(\mathbf{r}, t) = G \int_V \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\rho_0(\mathbf{x}, t) \delta\mathbf{r}(\mathbf{x}, t)] |\mathbf{x} - \mathbf{r}|^{-1} d\tau', \quad (15.6)$$

который можно также получить, если взять эйлерову вариацию от решения (4.43) уравнения Пуассона, а затем использовать линеаризованное уравнение неразрывности (5.29а).

Из нулевого значения плотности ρ_0 на поверхности конфигурации вытекает еще одно следствие. Дело в том, что по существу всегда мы будем предполагать, что давление на поверхности конфигурации обращается в нуль, т.е. $P_0 = 0$ и

$$\delta P = 0. \quad (15.7)$$

Используем теперь соотношение (5.16) между лагранжевой и эйлеровой вариациями и выразим ∇P_0 через $d\mathbf{v}_0/dt$ и $\nabla\psi_0$ с помощью невозмущенного уравнения импульса. Мы получаем, что на поверхности конфигурации

$$P' = \rho_0 \delta \mathbf{r} \cdot (d\mathbf{v}_0/dt + \nabla\psi_0) = 0, \quad (15.8)$$

если ρ_0 на поверхности обращается в нуль и если величина в скобках повсюду имеет конечное значение. Таким образом, одновременное обращение в нуль P и ρ на поверхности означает, что обе вариации, δP и P' также равны нулю на поверхности. Этот вывод будет использован в следующем разделе.

Итак, когда все объемные силы обусловлены собственной гравитацией, то для малых адиабатических колебаний правую часть уравнения импульса [скажем, (5.32)] можно полностью описать на языке поля смещений $\delta \mathbf{r}$ элементов массы. Упомянутое уравнение с представленной таким образом правой частью — это линейное адиабатическое волновое уравнение для нерадiallyных колебаний, которое ниже будет служить основой для изложения большинства вопросов. Оно имеет следующий вид:

$$d^2 \delta \mathbf{r} / dt^2 = (-\rho^{-1} \nabla P - \nabla \psi)' + \delta \mathbf{r} \cdot \nabla (-\rho_0^{-1} \nabla P_0 - \nabla \psi_0). \quad (15.8')$$

15.2. Свойства линейного адиабатического волнового уравнения для важного частного случая

Частный случай, рассматриваемый в настоящем разделе (а фактически и в большинстве оставшихся глав), характеризуется следующими предположениями в дополнение к сделанным в начале данной части:

а. Как давление, так и плотность на поверхности конфигурации обращаются в нуль.

б. Невозмущенное (неосциллирующее) состояние системы — это состояние покоя ($\mathbf{v}_0 = 0$) и гидростатического равновесия ($d\mathbf{v}_0/dt = 0$). Отсюда следует, например, что система не вращается.

в. Невозмущенная система является сферически симметричной. (Это предположение естественным образом вытекает из предположения (б), если единственной объемной силой является собственная гравитация.)

Вследствие предположения (б) лагранжова вариация правой части линеаризованного уравнения импульса совпадает с соответствующей эйлеровой вариацией. Следовательно, эту правую часть можно записать в виде линейного оператора \mathcal{L} , действующего на $\delta \mathbf{r}$. Имеем [см. уравнение (15.8')]

$$d^2 \delta \mathbf{r} / dt^2 = -\mathcal{L}(\delta \mathbf{r}), \quad (15.9)$$

причем если $\rho_0 = 0$ на поверхности конфигурации [предположение (а)], то оператор $\mathcal{L}(\delta r)$ принимает следующую форму:

$$\mathcal{L}(\zeta) = \rho^{-2} (\nabla P) \nabla \cdot (\rho \zeta) - \rho^{-1} \nabla (\zeta \cdot \nabla P) - \\ - \rho^{-1} \nabla (\Gamma_1 P \nabla \cdot \zeta) + \nabla \left[G \int_V \nabla_x \cdot [\rho(x, t) \zeta(x, t)] |x - r|^{-1} d\tau' \right]. \quad (15.10)$$

Мы отбросили здесь индекс 0 при равновесных (невозмущенных) величинах и для краткости записали $\zeta = \delta r$. Из соотношения (15.10) ясно, например, что оператор \mathcal{L} — линейный.

Важное свойство оператора \mathcal{L} состоит в том, что он является самосопряженным относительно элемента массы $\rho d\tau$, как впервые показал Чандрасекар [73, 77]. Это свойство можно выразить следующими соотношениями:

$$\int_V \eta^* \cdot \mathcal{L}(\zeta) \rho d\tau = \left[\int_V \zeta^* \cdot \mathcal{L}(\eta) \rho d\tau \right]^* = \int_V \zeta \cdot [\mathcal{L}(\eta)]^* \rho d\tau, \quad (15.11)$$

где ζ и η — два произвольных вектора, достаточно регулярных как функции пространственных координат, а звездочка означает комплексно сопряженную величину.

Самосопряженность оператора \mathcal{L} можно доказать, подставив в первый интеграл (15.11) выражение (15.10) для $\mathcal{L}(\zeta)$ с предварительно выделенными в нем величинами ρ' , P' и ψ' . Затем выполняется интегрирование по частям для тех интегралов, которые содержат P' и ψ' , и используется теорема Гаусса — Остроградского. Оба получаемых поверхностных интеграла равны нулю, поскольку в соответствии со сделанными предположениями P' и ρ на поверхности конфигурации обращаются в нуль (см. выше). Подставляя вместо ρ' , P' и ψ' выражения, полученные выше, представим интеграл в левой части (15.11) в виде суммы пяти объемных интегралов, один из которых двойной. Поскольку оба градиента ∇P и $\nabla \rho$ направлены вдоль радиуса [предположение (в)], становится очевидным, что величины η^* и ζ в этом выражении можно произвольно менять местами. А поскольку оператор \mathcal{L} вещественный, $[\mathcal{L}(\eta)]^* = \mathcal{L}(\eta^*)$, откуда непосредственно следует самосопряженность оператора \mathcal{L} , выражаемая соотношением (15.11). В разд. 15.3 мы увидим, что для адиабатических колебаний правую часть линейизованного уравнения импульса можно записать в самосопряженном виде, даже если предположения (а) — (в) не справедливы.

Из самосопряженности оператора \mathcal{L} вытекает ряд важных следствий, которые мы теперь и рассмотрим. Но сначала отметим, что если $\mathbf{v}_0 = 0$, как предполагается в данном разделе, то $d^2/dt^2 = \partial^2/\partial t^2$, и поэтому линейное адиабатическое волновое уравнение можно записать в виде

$$\partial^2(\delta r)/\partial t^2 = -\mathcal{L}(\delta r). \quad (15.12)$$

Следовательно, если

$$\delta r(r, t) = \mathbf{u}(r) \exp[i\sigma t], \quad (15.13)$$

то уравнение (15.12) становится уравнением на собственные значения

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}) = \sigma^2 \mathbf{u}. \quad (15.14)$$

Здесь величины σ^2 и $u(r)$ представляют собой соответственно собственное значение (квадрат угловой частоты колебаний) и собственную функцию, или собственный вектор, оператора \mathcal{L} . Рассмотрим теперь следствия самосопряженности оператора \mathcal{L} .

1. *Все собственные значения вещественны.* Вещественность σ^2 следует из условия самосопряженности (15.11). Если подставить в него уравнение (15.14) и его комплексно сопряженную форму для k -го собственного значения σ_k^2 и соответствующей собственной функции u_k , то окажется, что σ_k^2 должно совпадать со своей комплексно сопряженной величиной, а это и есть условие вещественности σ_k^2 . Поэтому, как и в чисто радиальном случае, движение в нерадиальном случае должно быть либо колебательным с постоянной (во времени) амплитудой, либо должно экспоненциально нарастать с течением времени (что соответствует динамической неустойчивости). Таким образом, комплексных частот для адиабатических колебаний при отсутствии давления на поверхности не существует.

Следует заметить, что вывод о вещественности квадратов собственных частот свободных колебаний звезды зависит от сделанных нами предположений о том, что система в невозмущенном состоянии является статической ($v_0 = 0$) и находится в гидростатическом равновесии ($dv_0/dt = 0$), а также о том, что давление обращается в нуль на поверхности. Если бы в невозмущенной системе присутствовали движения или ускорения или если бы давление на поверхности не обращалось в нуль, то подобный вывод, вообще говоря, был бы неверным. Например, хорошо известно (см. ниже в разд. 19.1), что если невозмущенная система вращается, то не обязательно все собственные значения вещественны.

2. *Собственные функции ортогональны между собой относительно элемента массы $\rho d\tau$.* Рассмотрим две моды нерадиальных колебаний, скажем k и l , с собственными функциями u_k и u_l и собственными значениями σ_k^2 и σ_l^2 . Тогда мы имеем $\mathcal{L}(u_l) = \sigma_l^2 u_l$ и $[\mathcal{L}(u_k)]^* = \sigma_k^2 u_k^*$, учитывая при этом вещественность σ_k^2 . Подставляя эти соотношения в условие самосопряженности (15.11), получим, что при $\sigma_k^2 \neq \sigma_l^2$

$$\int_V u_k^* \cdot u_l \rho d\tau = 0 \quad (k \neq l), \quad (15.15)$$

т.е. собственные функции u_k и u_l ортогональны между собой относительно элемента массы $\rho d\tau$. Что касается вырожденного случая ($\sigma_k^2 = \sigma_l^2$), то, как хорошо известно, для него всегда можно построить ортогональную систему функций (см., например, [492, § 10]). Таким образом, даже в этом случае сделанное утверждение справедливо.

3. *Собственные значения подчиняются вариационному принципу.* Впервые это показал Чандрасекар [77]. Мы приведем здесь другое доказательство, следуя работе Линден-Белла и Острайкера [356] и проводя его почти так же, как в чисто радиальном случае, детально рассмотренном в разд. 8.10. Определим вещественное число Σ^2 посредством соотношения

$$\Sigma^2 \int_V u^* \cdot u \rho d\tau = \int_V u^* \cdot \mathcal{L}(u) \rho d\tau, \quad (15.16)$$

где $u(r)$ — произвольная достаточно регулярная векторная функция r . Пусть функция $u(r)$ испытывает в каждой точке r малое изменение Δu , причем r и все невозмущенные величины остаются постоянными. Тогда из соотношения (15.16) мы получаем выражение, включающее Δu , Δu^* , $\Delta \mathcal{L}(u)$ и $\Delta \Sigma$, где $\Delta \Sigma$ — соответствующее изменение числа Σ . Однако из линейности оператора \mathcal{L} следует, что $\Delta \mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(\Delta u)$. Кроме того, благодаря самосопряженности оператора \mathcal{L} величины u^* и Δu в этом выражении можно менять местами. Наконец, данное выражение можно сильно упростить, учитывая, что оператор \mathcal{L} и число Σ^2 вещественны. В результате получаем

$$2\Sigma(\Delta\Sigma) \int_V u^* \cdot u \rho d\tau + 2\operatorname{Re} \left[\int_V (\Delta u^*) \cdot [\Sigma^2 u - \mathcal{L}(u)] \rho d\tau \right] = 0, \quad (15.17)$$

где $\operatorname{Re}[\dots]$ — вещественная часть соответствующей величины.

Теперь если $\mathcal{L}(u) = \Sigma^2 u$, то $\Delta \Sigma = 0$ даже при $\Delta u^* \neq 0$. И наоборот, если $\Delta \Sigma = 0$, а величина Δu^* произвольна (но мала), то $\mathcal{L}(u) = \Sigma^2 u$. Но это как раз и есть линейное адиабатическое волновое уравнение для нерадиальных колебаний, откуда следует $u(r) = u_k(r)$ и $\Sigma^2 = \sigma_k^2$, т.е. $u(r)$ и Σ^2 должны быть соответственно собственной функцией и собственным значением этого уравнения. Итак, мы доказали следующее: те решения уравнения $\mathcal{L}(u) = \Sigma^2 u$, для которых величина Σ имеет экстремум ($\Delta \Sigma = 0$) относительно произвольных малых изменений функции $u(r)$, являются *собственными функциями* $u_k(r)$, а связанные с этими решениями собственные значения — соответствующими *адиабатическими собственными значениями* σ_k^2 для k -й моды.

Однако этот вариационный принцип не столь полезен, как в случае чисто радиальных колебаний. Причина здесь заключается главным образом в том, что уравнения линейных адиабатических нерадиальных колебаний не образуют системы уравнений Штурма — Лиувилля, как подчеркивается в гл. 17. Следовательно, однозначное и простое упорядочение собственных значений невозможно, а поэтому для произвольной заданной моды нельзя заранее сказать, является ли соответствующий экстремум минимумом или максимумом. В случае чисто радиальных колебаний мы имеем уравнения типа Штурма — Лиувилля, что позволяет однозначным образом упорядочить моды и в результате доказать, что экстремум для основной моды является минимумом (разд. 8.10).

Следует отметить, что если в невозмущенном состоянии системы присутствуют движения (такие, как вращение), то рассмотренный вариационный принцип необходимо несколько видоизменить (разд. 19.1).

Кроме того, к нерадиальным колебаниям звезд применимо некоторое соотношение период — средняя плотность, аналогичное соотношению для радиальных колебаний. Этот вывод следует просто из анализа размерности, например, для интегрального выражения (15.16), определяющего периоды нерадиальных колебаний. Однако, как мы увидим ниже (гл. 17), произведение (период)² · (средняя плотность) для таких колебаний может быть гораздо более чувствительным к строению звезды (например, к относительной концентрации вещества к звездному центру), чем в случае радиальных колебаний.

15.3. Более общий случай

Более общий случай, который мы обсудим в этом разделе, относится к линейным адиабатическим колебаниям, но в нем не учитываются три предположения, сделанные в разд. 15.2. Поэтому в рассматриваемых здесь системах плотность на поверхности не обязательно обращается в нуль (но давление на поверхности по-прежнему принимается равным нулю), в них могут присутствовать произвольные скорости (и ускорения), и они не обязательно должны быть сферически симметричными. Частным случаем здесь является вращающаяся звезда, вращение которой может быть медленным или быстрым, твердотельным или дифференциальным.

Впервые малые адиабатические колебания вращающейся звезды рассмотрел Клемент [100]. Чандрасекар и Лебовиц [80] заметили, что свойство самосопряженности сохраняется, даже если не делать предположения об обращении в нуль плотности на поверхности. Смейерс [525] показал, что вариационный принцип, рассмотренный Чандрасекаром и Лебовицем [80], даже для нерадиальных колебаний эквивалентен принципу Гамильтона в классической механике. Линден-Белл и Острайкер [356] провели более общее и более строгое исследование по сравнению с работой [100]; они уделили особое внимание более общему случаю. Мы не будем здесь излагать деталей этой работы, поскольку она вполне доступна и интересующийся читатель может к ней обратиться.

В рассматриваемом случае лагранжева и эйлера вариации правой части linearизованного уравнения импульса [скажем, уравнения (5.32)] не равны друг другу. Запишем это уравнение в следующем виде:

$$d^2 \delta r / dt^2 = -\bar{\mathcal{P}}(\delta r) - \bar{\mathcal{Y}}(\delta r), \quad (15.18)$$

где $\bar{\mathcal{P}}$ и $\bar{\mathcal{Y}}$ — линейные векторные операторы. Если единственной объемной силой является собственная гравитация, то мы имеем

$$\bar{\mathcal{P}}(\xi) = (\rho^{-1} \nabla P)' + \xi \cdot \nabla (\rho^{-1} \nabla P), \quad (15.19a)$$

$$\bar{\mathcal{Y}}(\xi) = \nabla \psi' + \xi \cdot \nabla (\nabla \psi), \quad (15.19b)$$

где вариации давления P предполагаются адиабатическими. Обратите внимание, что правая часть уравнения (15.18) совпадает с правой частью уравнения (15.8'). Оказывается справедливым важный результат, впервые доказанный Линден-Беллом и Острайкером [356]: операторы $\bar{\mathcal{Y}}$ и $\bar{\mathcal{P}}$ являются самосопряженными [в смысле уравнения (15.11)], причем для самосопряженности $\bar{\mathcal{P}}$ требуется, чтобы давление обращалось в нуль на поверхности конфигурации*.

* Операторы, введенные Линден-Беллом и Острайкером [356], отличаются от введенных нами на множитель ρ — плотность невозмущенной (неосциллирующей) конфигурации. Говоря конкретнее, мы имеем, например, $\bar{\mathcal{P}}_{[356]} = \rho \bar{\mathcal{P}}_{\text{Сок}}$, где $\bar{\mathcal{P}}_{\text{Сок}}$ определяется выражением (15.19a). Однако это различие в определениях не приводит к различиям в конечных результатах, поскольку определение самосопряженности, принятое в [356], отличается от нашего [см. соотношение (15.11)] как раз на множитель ρ .

Однако следует подчеркнуть, что хотя для малых адиабатических колебаний правая часть линеаризованного уравнения импульса (15.18) даже в этом более общем случае может быть представлена как самосопряженный оператор, не обязательно все собственные значения линейного адиабатического волнового уравнения являются вещественными, что и было показано в [356] (см. также разд. 19.1).

ГЛАВА 16

НАРАСТАНИЕ ИЛИ ЗАТУХАНИЕ МАЛЫХ НЕРАДИАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

В этой главе в рамках линейной теории рассматривается задача о нарастании или затухании нерадиальных колебаний звезд. Мы используем два подхода: один преимущественно физический (разд. 16.1), а другой более формальный (разд. 16.2). Оба подхода приводят к одному и тому же результату — выражению для коэффициента устойчивости (разд. 9.1) в случае нерадиальных колебаний. По своей форме это выражение совпадает с соответствующим выражением для случая чисто радиальных колебаний (9.13).

Всюду в этой главе мы используем три основных предположения, сформулированных в разд. 15.2.

16.1. Линеаризованное уравнение энергии

В настоящем разделе мы покажем, что «линеаризованное» уравнение энергии (фактически оно является уравнением второго порядка), которое было выведено в разд. 9.1 для чисто радиальных колебаний звезд [см. уравнение (9.3)], оказывается в точности справедливым и для колебаний общего вида (т.е. нерадиальных). Этот вывод позволяет физически обосновать выражения, используемые при расчете нарастания или затухания колебаний, а также способствует более ясному пониманию общих вопросов.

Согласно трем предположениям, сделанным в разд. 15.2, $\mathbf{v} = \delta \mathbf{v}$ и $d\mathbf{v}/dt = \delta \mathbf{v} / \delta t = \mathbf{v}$. А тогда линеаризованное уравнение движения — это уравнение (5.31), в котором $\mathbf{f}' = -\nabla \psi'$, где ψ' — эйлерова вариация гравитационного потенциала. Мы будем обычно отбрасывать индекс 0 у невозмущенных величин и использовать стандартные обозначения (см. предыдущие главы).

Если в уравнении (5.31) выразить P' через δP с помощью соотношения (5.16) между эйлеровой и лагранжевой вариациями, то получим

$$\dot{\mathbf{v}} = -\rho^{-1} \nabla \delta P + \rho^{-1} \nabla (\delta \mathbf{r} \cdot \nabla P) + (\rho' / \rho^2) \nabla P - \nabla \psi'. \quad (16.1)$$

Теперь скалярно умножим это уравнение на $\rho d\tau \mathbf{v}$ ($d\tau$ — элемент объема) и проинтегрируем по всему объему конфигурации. Два первых члена в правой части можно затем проинтегрировать по частям и использовать теорему Гаусса — Остроградского. В результате правая часть будет состоять из шести интегралов, в том числе двух поверхностных. Однако поверхностные интегралы обращаются в нуль, так как на поверхности в соответствии с наши-

ми предположениями $\delta P = 0$, а поскольку $\rho = 0$, то и $\nabla P = 0$. Поэтому имеем следующее уравнение:

$$\int_V \rho \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} d\tau = - \int_V (\delta P / \rho) (d\delta\rho / dt) d\tau + \int_V (1/\rho) (\delta \mathbf{r} \cdot \nabla P) (d\delta\rho / dt) d\tau + \\ + \int_V (\rho' / \rho) \mathbf{v} \cdot \nabla P d\tau - \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \psi' d\tau. \quad (16.2)$$

Рассмотрим второй интеграл в правой части. Преобразуем его, как при интегрировании по частям (только в данном случае относительно временной переменной t) и вынесем оператор d/dt за знак интеграла, что допустимо благодаря условию сохранения массы [$d(\rho d\tau)/dt = 0$; см. гл. 4]. Кроме того, используем соотношение $d(\delta \mathbf{r})/dt = \delta \mathbf{v} = \mathbf{v}$ и тот факт, что в остальных интегралах, появившихся в результате такого преобразования, невозмущенные величины не зависят от времени. Далее, в одном из этих интегралов запишем $\delta\rho = \rho' + \delta \mathbf{r} \cdot \nabla \rho$, а в другом $\delta\rho = -\rho \nabla \cdot \delta \mathbf{r}$. Еще раз сделаем такую же операцию (относительно t) и учтем, что в сферической звезде векторы $\nabla \rho$ и ∇P направлены вдоль радиуса. В результате получим

$$\int_V (1/\rho) (\delta \mathbf{r} \cdot \nabla P) (d\delta\rho / dt) d\tau = - \frac{d}{dt} \int_V (\nabla \cdot \delta \mathbf{r}) (\delta \mathbf{r} \cdot \nabla P) d\tau - \\ - \int_V (\rho' / \rho) (\mathbf{v} \cdot \nabla P) d\tau - \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_V (1/\rho) (\delta \mathbf{r} \cdot \nabla \rho) (\delta \mathbf{r} \cdot \nabla P) d\tau \right]. \quad (16.3)$$

Рассмотрим теперь последний интеграл в уравнении (16.2). Пронтегрируем его по частям, используя теорему Гаусса — Остроградского, условие $\rho = 0$ на поверхности, а также линеаризованное уравнение неразрывности. Кроме того, учтем результаты разд. 15.1. В итоге найдем

$$- \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \psi' d\tau = d \left[\frac{1}{2} G \int_V \int_V \rho'(\mathbf{r}, t) \rho'(\mathbf{x}, t) |\mathbf{x} - \mathbf{r}|^{-1} d\tau' d\tau \right], \quad (16.4)$$

где $d\tau'$ — элемент объема в точке \mathbf{x} .

Наконец, рассмотрим первый интеграл в правой части уравнения (16.2). Исключим из него δP с помощью термодинамического тождества (5.35а), преобразуем производную по времени так же, как и во втором интеграле, и используем линеаризованное уравнение неразрывности в виде $\delta\rho = -\rho \nabla \cdot \delta \mathbf{r}$. Тогда получим

$$- \int_V (\delta P / \rho) (d\delta\rho / dt) d\tau = - d \left[\frac{1}{2} \int_V \Gamma_1 P (\nabla \cdot \delta \mathbf{r})^2 d\tau \right] / dt - \\ - \int_V (\Gamma_3 - 1) T \delta s [d(\delta\rho / \rho) / dt] \rho d\tau. \quad (16.5)$$

Объединяя все приведенные результаты и сравнивая их с уравнением (15.10), видим, что можно записать следующее:

$$d \left(\int_V \frac{1}{2} \rho v^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_V \delta \mathbf{r} \cdot \mathcal{L}(\delta \mathbf{r}) \rho d\tau \right) / dt = \\ = - \int_V (\Gamma_3 - 1) T \delta s [d(\delta\rho / \rho) / dt] \rho d\tau, \quad (16.6)$$

где \mathcal{L} — самосопряженный линейный оператор, введенный в гл. 15, а s — удельная зитропня.

В завершение рассмотрения остается выяснить физический смысл величины $\frac{1}{2} \int_V \delta \mathbf{r} \cdot \mathcal{L}(\delta \mathbf{r}) \rho d\tau$.

Отметим сначала, что величина $-\mathcal{L}(\delta \mathbf{r})$, согласно уравнению (15.9), — это лагранжева вариация полной силы, действующей на единицу массы в точке \mathbf{r} в момент t и обусловленной полем адиабатических лагранжевых смещений $\delta \mathbf{r}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, t)$. (Если в невозмущенном состоянии отсутствуют ускорения, то эта величина является и эйлеровой вариацией полной силы.) Рассмотрим теперь приращения $d\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, t)$ в смещениях элементов массы. При таких приращениях работа, совершаемая рассматриваемыми силами во всей системе, равна

$$dW = - \int_V (d\boldsymbol{\eta}) \cdot \mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}) \rho d\tau. \quad (16.7)$$

Но оператор \mathcal{L} самосопряженный. Учитывая это обстоятельство, вынося оператор d за знак интеграла (поскольку $d(\rho d\tau) = 0$) и интегрируя по полным смещениям $\delta \mathbf{r}$, получим следующее выражение для полной работы, совершенной рассматриваемыми силами при смещениях $\delta \mathbf{r}$:

$$W = - \frac{1}{2} \int_0^{\delta \mathbf{r}} d \int_V \boldsymbol{\eta} \cdot \mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}) \rho d\tau = - \frac{1}{2} \int_V \delta \mathbf{r} \cdot \mathcal{L}(\delta \mathbf{r}) \rho d\tau. \quad (16.8)$$

Эта работа является консервативной в том смысле, что ее величина не зависит от траекторий, по которым достигнуты конечные значения смещений. Следовательно, она обладает свойствами потенциальной энергии. И действительно, замечая, что потенциальная энергия равна работе, совершенной против сил, действующих в системе, можно записать $W = -\delta\Phi$, где

$$\delta\Phi = \frac{1}{2} \int_V \delta \mathbf{r} \cdot \mathcal{L}(\delta \mathbf{r}) \rho d\tau \quad (16.9)$$

есть полная потенциальная энергия системы в возмущенном состоянии (для адиабатических смещений), принятая равной нулю, когда любые смещения отсутствуют. Таким образом, величина в правой части выражения (16.9) имеет в общем случае нерадиальных колебаний звезд тот же физический смысл, что и в случае чисто радиальных смещений. Вариация $\delta\Phi$ оказывается величиной второго порядка малости, потому что вариация первого порядка тождественно обращается в нуль, если невозмущенная система находится в гидростатическом равновесии.

Теперь можно дать физическую интерпретацию интегрального выражения (15.16) для собственного значения σ^2 нерадиальных адиабатических колебаний $[\Sigma^2]$ в (15.16) становится собственным значением σ^2 , если \mathbf{u} — собственная

функция]. Если записать $\delta r = u \cos(\sigma t + \phi)$, то точно тем же путем, как в гл. 8 для чисто радиальных колебаний, мы приходим к следующим результатам:

$$\overline{\delta \mathcal{T}} = \frac{1}{4} \sigma^2 \int_V \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \rho d\tau, \quad (16.10)$$

$$\overline{\delta \Phi} = \frac{1}{4} \int_V \mathbf{u}^* \cdot \mathcal{L}(\mathbf{u}) \rho d\tau, \quad (16.11)$$

где $\delta \mathcal{T}$ — вариация полной кинетической энергии системы, а черта означает усреднение по периоду рассматриваемой моды. Таким образом, физический смысл уравнения (15.16) состоит в том, что, как и в случае радиальных пульсаций,

$$4\overline{\delta \mathcal{T}} = 4\overline{\delta \Phi}. \quad (16.12)$$

Возвращаясь теперь к линеаризованному уравнению энергии, имеем

$$d\delta\Psi/dt = - \int_V (\Gamma_3 - 1) T \delta s [d(\delta\rho/\rho)/dt] \rho d\tau, \quad (16.13)$$

где $\delta\Psi (= \delta\mathcal{T} + \delta\Phi)$ — полная энергия пульсаций, а $\delta\mathcal{T}$ — полная кинетическая энергия пульсаций [см. уравнение (16.6)]. Выразив в (16.13) производную по времени от $\delta\rho$ через производные от δs и от произведения $\delta s \delta\rho$, а затем проинтегрировав по всему периоду в предположении, что в конце периода система возвращается в исходное состояние, и разделив на период Π , получаем следующее выражение для средней скорости изменения $\delta\Psi$ за период:

$$\langle d\delta\Psi/dt \rangle = (1/\Pi) \int_0^\Pi dt \int_V (\Gamma_3 - 1) (\delta\rho/\rho) \delta(\varepsilon - \rho^{-1} \nabla \cdot \mathbf{F}) \rho d\tau. \quad (16.14)$$

Здесь использовано соотношение (7.10), справедливое для термодинамически-обратимых процессов.

Итак, результат, полученный в гл. 9 для чисто радиальных колебаний [см. уравнение (9.3)], в точности справедлив и для нерадиальных колебаний. Уравнение (16.14) служит физической основой для рассмотрения устойчивости этих колебаний, т.е. их затухания или нарастания (разд. 16.2), совершенно так же, как и уравнение (9.3) в случае радиальных пульсаций.

16.2. Интегральные выражения для собственных значений

В этом разделе мы покажем, что для собственных значений линейных нерадиальных колебаний существуют интегральные выражения, полностью аналогичные полученным в разд. 9.3 для радиальных пульсаций. Эти интегральные выражения позволяют вывести соотношение для коэффициента устойчивости (обратно пропорционального времени изменения амплитуды пульсаций в e раз) в случае нерадиальных колебаний. В свете результатов

предыдущего раздела подобное заключение, вероятно, не является удивительным. Как и выше, мы будем использовать три предположения, сделанные в разд. 15.2.

Поскольку скорость в невозмущенном состоянии системы принята равной нулю, нет никакого различия между операторами d/dt и $\partial/\partial t$, а поэтому линеаризованное уравнение движения можно записать в следующем виде:

$$\partial^2 \delta \mathbf{r} / \partial t^2 = -\mathcal{L}(\delta \mathbf{r}) - \rho^{-1} \nabla [\delta P - (\Gamma_1 P / \rho) \delta \rho], \quad (16.15)$$

где \mathcal{L} — линейный оператор, введенный в гл. 15. Второй член в правой части представляет собой вклад из-за неадиабатичности.

Продифференцируем теперь (16.15) по времени и учтем, что невозмущенные величины от времени не зависят. Производную по времени от неадиабатического члена определим с помощью линеаризованного уравнения энергии в форме (5.34а).

Далее, предположим, что

$$\delta \mathbf{r}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}) \exp[i\omega t] \quad (16.16)$$

и примем такую же зависимость от времени для других пульсационных переменных. Тогда продифференцированное по времени уравнение (16.15) будет иметь вид

$$-i\omega^2 \mathbf{u} + i\omega \mathcal{L}(\mathbf{u}) = -\rho^{-1} \nabla \{ \rho(\Gamma_3 - 1) [\delta(\varepsilon - \rho^{-1} \nabla \cdot \mathbf{F})]_{sp} \}, \quad (16.17)$$

где индекс sp обозначает пространственную часть соответствующей величины. Умножим теперь уравнение (16.17) скалярно на $\mathbf{u}^* \rho d\tau$ и проинтегрируем по всему объему V конфигурации. В правой части проведем интегрирование по частям и используем теорему Гаусса — Остроградского, в результате чего появится поверхностный интеграл. Однако если плотность на поверхности конфигурации равна нулю, то этот интеграл обращается в нуль. Кроме того, во втором интеграле, получившемся при интегрировании по частям, используем линеаризованное уравнение неразрывности

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^* = -(\delta \rho / \rho)_{sp}^*. \quad (16.18)$$

Введем теперь следующие обозначения:

$$J = \int_V \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} \rho d\tau, \quad (16.19)$$

$$J\mathcal{L}^2 = \int_V \mathbf{u}^* \cdot \mathcal{L}(\mathbf{u}) \rho d\tau, \quad (16.20)$$

$$C = \int_V (\Gamma_3 - 1) (\delta \rho / \rho)_{sp}^* [\delta(\varepsilon - \rho^{-1} \nabla \cdot \mathbf{F})]_{sp} \rho d\tau. \quad (16.21)$$

В результате получим

$$i\omega(\omega^2 - \Sigma^2) = C/J. \quad (16.22)$$

По своей форме это точно такое же кубическое уравнение для собственного значения ω , как и в случае чисто радиальных колебаний [см. уравнение (9.43)].

Следовательно, весь анализ этого уравнения, проведенный в гл. 9 (явные формулы для ω и т.д.), можно непосредственно перенести на случай нерадиальных колебаний. Однако следует иметь в виду замечание, высказанное Леду и Вальравеном [345, p.552]*.

В частности, когда величина $|C/J|$ мала по сравнению с любым отдельным членом в левой части (16.22), решение для амплитуды колебаний имеет вид

$$\delta r(r, t) = u(r) \exp[\pm i\sigma t - \kappa t], \quad (16.23)$$

где σ (вещественная часть ω) $\approx \Sigma = 2\pi/\Pi$, и эта величина представляет собой угловую частоту колебаний, κ — коэффициент устойчивости, приближенно определяемый выражением (9.13), в котором C дается формулой (16.21). Величины C_r (вещественная часть C) и J часто вычисляются с использованием аднабатических собственных функций в подинтегральных выражениях. Такой подход называется квазиаднабатическим приближением, и он зачастую дает довольно точные результаты.

ГЛАВА 17

ЛИНЕЙНЫЕ АДИАБАТИЧЕСКИЕ НЕРАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ЗВЕЗД

В этой главе мы рассмотрим малые нерадиальные колебания сферических звезд относительно их равновесных состояний. Кроме того, всюду, за исключением разд. 17.1 — 17.4 и 17.14, мы будем предполагать, что колебания являются еще и аднабатическими, т.е. удовлетворяют уравнениям (5.36а) и (5.36б). Даже в таком приближении задача оказывается математически весьма сложной. Еще более трудная задача малых неаднабатических нерадиальных колебаний будет кратко рассмотрена в гл. 18.

Если не указано особо, то для равновесных состояний, относительно которых, по предположению, совершаются колебания, мы будем использовать три допущения, принятые в гл. 15. Дополнительно предположим существование теплового равновесия ($\varepsilon_0 - dL_{r,0}/dm = 0$) и будем пренебрегать любыми изменениями химического состава, которые могут быть следствием ядерных превращений.

Многие из общих замечаний, сделанных в начале гл. 8 относительно малых радиальных аднабатических колебаний звезд, применимы и к более общему случаю нерадиальных колебаний.

* Леду и Вальравен [345] указывают, что когда соотношения, полученные при интегрировании дифференциальных уравнений, рассматриваются как алгебраические уравнения для собственных значений, к их анализу следует подходить осторожно. Леду и Вальравен приводят следующий пример, основываясь на уравнениях линейных аднабатических нерадиальных колебаний в приближении Каулинга [см. ниже уравнения (17.84а) и (17.84б)]. Если умножить (17.84а) на w , а (17.84б) на v [где w и v определяются соотношениями (17.83)], сложить оба уравнения и проинтегрировать от $r = 0$ до $r = R$, то получится квадратное уравнение относительно σ^2 , одно из решений которого не имеет физического смысла, и его необходимо отбросить. — *Прим. перев.*

В разд. 17.1 — 17.4 мы рассмотрим в основном общие физические и математические понятия, используемые при изучении нерадиальных колебаний. В этих разделах не оговаривается, что колебания являются адиабатическими, но такое предположение сделано в разд. 17.5 — 17.13.

Методы вычисления адиабатических собственных значений и собственных функций для моделей общего вида приводятся в разд. 17.5, а в разд. 17.6 рассматриваются граничные условия. Однородная сжимаемая модель — одна из немногих, которые можно исследовать аналитически, — кратко обсуждается в разд. 17.7. В разд. 17.8 описываются некоторые основные свойства нерадиальных адиабатических колебаний звезд и приводятся некоторые численные результаты для простых моделей. Для достаточно сложных звездных моделей определенные свойства колебаний оказываются качественно иными, и несколько этих различий рассматривается в разд. 17.10 и 17.11. В разд. 17.9 описывается и обсуждается важное приближение, в котором пренебрегается возмущениями гравитационного потенциала (приближение Каулинга). Разд. 17.12 посвящен нерадиальным колебаниям звезд в очень высоких модах. Использование весовых функций Эпштейна в приложениях к нерадиальным звездным колебаниям обсуждается в разд. 17.13. Наконец, в разд. 17.14 описываются некоторые методы расчета характерного времени затухания нерадиальных колебаний и приводятся несколько соответствующих результатов.

Превосходные обзоры нерадиальных колебаний сделаны Леду [338, 339]; см. также обзор Кокса [136]. Несколько детальных разработок и методов представлены в [86, 507, 626]. Уинн, Осаки, Аяно и Сибакхаси опубликовали прекрасную монографию [593], также посвященную нерадиальным колебаниям звезд.

17.1. Основные уравнения

Необходимые линеаризованные уравнения — это уравнения неразрывности, импульса, энергии, уравнение генерации и переноса энергии и уравнение Пуассона. Первые три из них — это уравнения (5.29а), (5.31) [в котором $\mathbf{v} = \mathbf{v}' = \delta \mathbf{v} = d(\delta \mathbf{r})/dt$] и (5.35а) соответственно. Используя соотношение (5.16) между эйлеровой и лагранжевой вариациями, легко показать, что для моделей, которые в невозмущенном состоянии являются сферическими и находятся в гидростатическом равновесии, уравнение импульса справедливо и в том случае, если в нем всюду эйлеровы вариации заменить лагранжевыми. Как обычно, эйлеровы вариации будем обозначать штрихами и отбросим индекс 0 у невозмущенных величин.

Уравнение генерации и переноса энергии имеет следующий вид:

$$Td\delta s/dt = \delta(\epsilon - \rho^{-1} \nabla \cdot \mathbf{F}), \quad (17.1)$$

где ϵ и \mathbf{F} — соответственно скорость генерации термоядерной энергии на единицу массы и суммарный вектор теплового потока, учитывающий в принципе все механизмы, которые могут вносить вклад в перенос тепла (мы подразумеваем здесь термодинамически обратимые процессы), а δs — лагранжева вариация удельной энтропии s . Правая часть уравнения (17.1) обыч-

но зависит от δr и ρ' , T' и $\nabla T'$, а также от других параметров и связана с конкретными механизмами генерации энергии и переноса тепла. В разд. 17.14 будут приведены явные выражения для $\delta[(\nabla \cdot \mathbf{F})/\rho]$ в случае лучистого переноса.

Уравнение Пуассона иногда удобнее рассматривать как два дифференциальных уравнения первого порядка, а не как одно уравнение второго порядка. По определению гравитационного потенциала ψ сила тяготения \mathbf{f} на единицу массы равна

$$\mathbf{f} = -\nabla\psi, \quad (17.2)$$

а уравнение Пуассона устанавливает, что

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = -\nabla^2\psi = -4\pi G\rho. \quad (17.3)$$

Соответствующие уравнения для эйлеровых вариаций получают просто добавлением штрихов к \mathbf{f} , ψ и ρ в (17.2) и (17.3).

Сначала запишем уравнение импульса в виде, удобном для нашего последующего изложения [345, § 74]. После некоторых преобразований, объединяя это уравнение с линеаризованным уравнением энергии, получаем для сферической звезды

$$d^2\delta r/dt^2 = -\nabla(P'/\rho + \psi') + \mathbf{A}(\Gamma_1 P/\rho)\nabla \cdot \delta \mathbf{r} - (\Gamma_3 - 1)T\delta s\nabla\rho/\rho, \quad (17.4)$$

где

$$\mathbf{A} = \rho^{-1}\nabla\rho - (\Gamma_1 P)^{-1}\nabla P. \quad (17.5)$$

Физическая интерпретация важной величины \mathbf{A} (радиальной составляющей вектора \mathbf{A} , единственной составляющей, если звезда сферически симметрична) будет дана в следующем разделе.

Для адиабатических колебаний $\delta s = 0$, и мы просто отбрасываем последний член в уравнении (17.4). Если не оговаривается особо, то в настоящей главе мы будем подразумевать именно такие колебания.

Если звезда в невозмущенном состоянии находится в гидростатическом равновесии (и потому является сферической), то $(P'/\rho + \psi')$ можно заменить на $(\delta P/\rho + \delta\psi)$.

17.2. Обсуждение величины \mathbf{A}

В случае сферически симметричной звезды единственным компонентом вектора \mathbf{A} является его радиальная составляющая:

$$A = \rho^{-1} d\rho/dr - (\Gamma_1 P)^{-1} dP/dr. \quad (17.6)$$

Все величины в этом уравнении относятся к равновесному (или невозмущенному) состоянию и зависят только от радиального расстояния r . Физический смысл величины A легко понять из следующего рассуждения, опирающегося на превосходное и ясное изложение этого вопроса в работах [580, 581].

Рассмотрим стратифицированную жидкость, в которой P , ρ и Γ_1 зависят только от r , и представим себе, что элемент жидкости, который первоначально находился на уровне r_0 , перемещен в новое положение $r_0 + \delta r$ (рис. 17.1).

Предположим, что элемент всегда сохраняется как целое и не перемешивается с окружающей средой. Обозначим через $\Delta\rho(r)$ разность на произвольном уровне r между плотностью элемента $\rho_{el}(r)$ и плотностью окружающей среды $\rho_{surr}(r)$ в непосредственной близости от элемента:

$$\Delta\rho(r) = \rho_{el}(r) - \rho_{surr}(r). \quad (17.7)$$

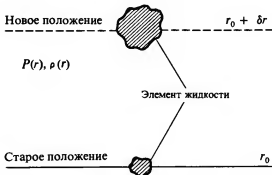


рис. 17.1. Смещение элемента жидкости из положения r_0 в положение $r_0 + \delta r$ в стратифицированной среде.

В общем случае $\Delta\rho$ состоит из двух слагаемых. Одно из них, скажем $\Delta_1\rho$, обусловлено попросту тем, что в невозмущенной жидкости плотность меняется от точки к точке. Для малых смещений δr это слагаемое дается следующим выражением:

$$\Delta_1\rho = -\delta r \, d\rho/dr, \quad (17.8)$$

где производная берется от распределения плотности в окружающей среде и вычисляется на уровне r_0 . Знак минус появляется потому, что рассматриваемое слагаемое всецело определяется изменением $\rho_{surr}(r)$ с расстоянием r , т.е. плотность $\rho_{el}(r)$ считается здесь постоянной. Второе слагаемое является результатом возможной сжимаемости жидкости и учитывает изменение $\rho_{el}(r)$ с r . Если давление внутри элемента в его новом положении отличается от давления в исходном положении, то объем элемента в новом положении может отличаться от его исходного объема. Если предположить, что элемент двигался к своему новому положению достаточно медленно, то он всегда будет находиться в равновесии с окружающей средой, т.е. давление внутри элемента всегда будет равно внешнему давлению. Кроме того, если бы при движении не происходило теплообмена между элементом и окружающей средой (по существу, такая ситуация могла бы возникнуть при достаточно быстром движении элемента), то элемент двигался бы адиабатически. В этом случае разность плотностей между элементом и окружающей средой могла бы возникнуть просто потому, что давление в невозмущенной жидкости меняется от точки к точке и что жидкость может быть сжимаемой. С точностью до малых величин первого порядка эта разность была бы равна

$$\Delta_2\rho = \delta r (d\rho/dP)_{ad} \, dP/dr, \quad (17.9)$$

где $(d\rho/dP)_{ad} = (\rho/P)/\Gamma_1$ — производная от ρ по P вдоль аднабаты (разд. 4.2в), а производная dP/dr от давления окружающей среды должна быть вычислена на уровне r_0 . Случай несжимаемой жидкости можно было бы рассмотреть, просто полагая $\Gamma_1 = \infty$, что дает $\Delta_2\rho = 0$ (однако см. ниже).

Таким образом, при смещении элемента на расстояние δr в стратифицированной жидкости полный избыток его плотности относительно плотности окружающей среды равен

$$\Delta\rho = \Delta_1\rho + \Delta_2\rho = -\rho[\rho^{-1}d\rho/dr - (\Gamma_1 P)^{-1}dP/dr]\delta r = -\rho A \delta r. \quad (17.10)$$

[Легко видеть, что в линейном приближении $\Delta\rho$ — это как раз эйлерава вариация плотности ρ , обозначенная ρ' в гл. 5, а $\Delta_2\rho$ — лагранжева вариация $\delta\rho$; в том же приближении первое равенство — это просто соотношение (5.16) между обоими типами вариаций.] Тогда *выталкивающая сила* f_B , действующая на рассматриваемый элемент и отнесенная к единице объема, с точностью до малых величин первого порядка равна

$$f_B = -g\Delta\rho = \rho g A \delta r, \quad (17.11)$$

где $g = Gm(r)/r^2$ — локальное ускорение силы тяжести [G — гравитационная постоянная, $m(r)$ — масса, заключенная внутри сферы радиуса r]. Далее, если f_B и δr имеют противоположные знаки, то выталкивающая сила будет стремиться вернуть элемент на его первоначальный уровень и жидкость будет *конвективно устойчивой*. Поэтому из уравнения (17.11) вытекает условие устойчивости относительно конвекции

$$A < 0, \quad (17.12)$$

тогда как условие $A > 0$ соответствует конвективной неустойчивости. Таким образом, величина A является локальным критерием конвективной устойчивости.

В случае конвективной устойчивости и в отсутствие теплообмена, трения и т.п. элемент будет совершать простое гармоническое движение относительно исходного уровня. Угловая частота N такого колебательного движения определится, если запишем $f_B = -\rho N^2 \delta r$, откуда

$$N^2 = -Ag. \quad (17.13)$$

Величину N обычно называют *частотой Брунта — Вайселя*.

Результат (17.13) легко получить более формально на основании разд. 17.1. Если давление внутри элемента всегда равно давлению окружающей среды, то $P' = 0$. Кроме того, в описанной простой картине, очевидно, пренебрегают возмущением ψ' . Пренебрежем также величиной δs , запишем $\delta P = \delta r \cdot \nabla P$, используем аднабатическое соотношение между δP и $\delta\rho$ [уравнение (5.36а)] и вспомним, что $(\nabla P)/\rho = -\mathbf{g}$ (ускорение силы тяжести), поскольку невозмущенная жидкость по предположению находится в гидростатическом равновесии. Мы получаем

$$d^2\delta r/dt^2 = -A\delta r \cdot \mathbf{g} = A\delta r g, \quad (17.14)$$

где $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_r$, если вектор \mathbf{g} направлен вдоль радиуса к центру, а δr — ради-

альная составляющая смещения δr . Записывая $\delta r \propto \exp[iNt]$, сразу получаем результат (17.13). В случае несжимаемой жидкости, для которой $\delta\rho = 0$, более прямой способ — это вернуться к уравнению (5.31), снова пренебечь возмущениями P' и ψ' и записать $\rho' = -\delta r \cdot \nabla\rho$. Тогда уравнение (17.13) получается так же, как и выше, только A заменяется на $(\nabla\rho)/\rho$ — значение A при $\Gamma_1 = \infty$. Дальнейшее рассмотрение можно найти в разд. 17.12.

[Интересно отметить два свойства уравнения (17.13) в случае несжимаемой жидкости, т.е. когда вместо A подставлено $(d\rho/dr)/\rho$. Во-первых, $N^2 > 0$ (что соответствует колебательному режиму), только если $d\rho/dr < 0$, т.е. только если плотность возрастает вглубь (мы всегда предполагаем, что ускорение силы тяжести $g \neq 0$ и направлено вниз). Если же плотность возрастает наружу, что имело бы место, если бы тяжелая жидкость находилась над более легкой, то $N^2 < 0$, и это соответствует динамической неустойчивости. Следовательно, такая стратификация неустойчива. Этот тип неустойчивости иногда называют неустойчивостью Рэлея — Тейлора (см., например, книгу Чандрасекара [72, Ch. XI]). Ясно, что неустойчивость Рэлея — Тейлора будет существовать при $d\rho/dr > 0$ и в случае сжимаемой жидкости, поскольку для системы, находящейся в гидростатическом равновесии, второй член во втором равенстве в уравнении (17.10) всегда вносит положительный вклад в значение A . Во-вторых, при $d\rho/dr = 0$, т.е. для однородной жидкости (когда плотность по всему объему системы одинакова), частота $N = 0$, что соответствует бесконечно большому периоду. Такая жидкость будет находиться в *безразличном равновесии* относительно рассмотренного здесь вида возмущений, и смещения из состояния равновесия элементы жидкости не будут осциллировать. По существу, именно этот вывод объясняет, почему в однородном несжимаемом шаре не существуют g -моды нерадиальных колебаний (см. [136, 338]; определение g -мод см. в разд. 17.7)].

Величина A тесно связана с обычным критерием конвективной устойчивости, введенным К.Шварцшильдом [499]. Действительно, легко показать (см., например, [146, Ch. 13]), что в случае неоднородного химического состава, непрерывно изменяющегося в пространстве,

$$A = \lambda_p^{-1}(\chi_T/\chi_\rho)[\nabla - \nabla_{ad} + (\chi_\mu/\chi_T)(d \ln \mu / d \ln P)]. \quad (17.15)$$

Здесь μ — средняя молекулярная масса, $\lambda_p = -(d \ln P / dr)^{-1}$ — высота однородной атмосферы, χ_ρ и χ_T были определены в разд. 4.2в, а

$$\chi_\mu = (\partial \ln P / \partial \ln \mu)_{\rho, T}. \quad (17.16)$$

Кроме того, введены обозначения

$$\nabla = (d \ln T / d \ln P), \quad \nabla_{ad} = (\partial \ln T / \partial \ln P)_{s, \mu}, \quad (17.17)$$

где ∇ — истинный логарифмический градиент температуры в звезде, взятый относительно давления, а ∇_{ad} — логарифмический адиабатический градиент.

Наконец, полезно заметить, что в случае однородного химического состава (μ постоянно по звезде) величина A служит еще и индикатором того, возрастает или убывает (локально) удельная энтропия в звезде в направлении от центра. Примем, например, для простоты, что $d \ln P$ равно изменению $\ln P$,

связанному с приращением dr в звезде в радиальном направлении от центра. Используя хорошо известное термодинамическое тождество, имеем тогда следующее выражение:

$$A = -[(\Gamma_2 - 1)/\Gamma_2](\rho T/P)(ds/dr), \quad (17.18)$$

которое показывает, что в тех областях, где удельная энтропия s возрастает наружу, $A < 0$ (что соответствует устойчивости относительно конвекции), и наоборот.

17.3. Представление переменных, связанных с возмущениями, с помощью сферических гармоник

Сначала запишем уравнение импульса (17.4) через компоненты вектора $\delta \mathbf{r}$ в сферической системе координат:

$$\delta \mathbf{r} = \mathbf{e}_r \delta r + \mathbf{e}_\theta \delta t_\theta + \mathbf{e}_\phi \delta t_\phi, \quad (17.19)$$

где \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ , \mathbf{e}_ϕ — безразмерные единичные векторы сферической системы координат (рис. 6.1), δr — радиальный компонент вектора $\delta \mathbf{r}$, а δt_θ и δt_ϕ — его трансверсальные компоненты:

$$\delta t_\theta = r \delta \theta, \quad \delta t_\phi = r \sin \theta \delta \phi, \quad (17.20)$$

причем $\delta \theta$ и $\delta \phi$ — соответствующие приращения полярного и азимутального углов θ и ϕ . Поскольку предполагается, что невозмущенная система находится в состоянии покоя, то $d/dt = \partial/\partial t$. Кроме того, мы принимаем, что все возмущения зависят от времени по закону $\exp[i\sigma t]$, а значит, $\partial^2/\partial t^2 = -\sigma^2$, где σ — угловая частота колебаний. Вспомня, что для сферической звезды вектор \mathbf{A} направлен вдоль радиуса ($\mathbf{A} = A \mathbf{e}_r$), получаем в случае адиабатического движения следующее представление уравнения импульса (17.4) в виде трех скалярных уравнений:

$$\sigma^2 \delta r = \partial \chi / \partial r - A(\Gamma_1 P / \rho) \alpha, \quad (17.21a)$$

$$\sigma^2 \delta t_\theta = r^{-1} \partial \chi / \partial \theta = \partial(\chi/r) / \partial \theta \quad (17.21b)$$

$$\sigma^2 \delta t_\phi = (1/r \sin \theta) \partial \chi / \partial \phi = (1/\sin \theta) \partial(\chi/r) / \partial \phi, \quad (17.21в)$$

где

$$\alpha = \nabla \cdot \delta \mathbf{r} (= -\delta \rho / \rho), \quad (17.22)$$

$$\chi = P' / \rho + \psi'. \quad (17.23)$$

Кроме того, мы часто будем использовать выражение для $\text{div} \delta \mathbf{r}$. С учетом (17.21a) — (17.21в) имеем

$$\nabla \cdot \delta \mathbf{r} = r^{-2} \partial(r^2 \delta r) / \partial r - (\sigma r)^{-2} L^2 \chi, \quad (17.24)$$

где оператор L^2 иногда называют оператором Лежандра:

$$L^2 = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (17.25)$$

Обычно предполагают, что всякая переменная, связанная с возмущением, обусловлена некоторой «нормальной модой» колебаний, и каждую нормальную моду рассматривают так, как будто существует только она одна. В большинстве приложений предполагается, что такая мода описывается произведением функций, зависящей только от r , и функций, зависящей только от полярного и азимутального углов θ и ϕ . Эта вторая функция принимается пропорциональной сферической гармонике $Y_l^m(\theta, \phi)$. (Хорошее краткое изложение свойств сферических гармоник содержится в книгах [108, р. 52 — 53; 461, р. 414]; более подробную информацию можно найти, например, в [285, гл. 2 и 3].) Величина l — это степень сферической гармоники, принимающая целочисленные положительные значения, включая нуль: $l = 0, 1, 2, \dots$. Для каждого значения l существует $2l + 1$ возможных значений m : $m = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l$; порядок сферической гармоники m иногда называют азимутальным индексом сферической гармоники*.

Цель этих замечаний — подчеркнуть, что сферические гармоники являются собственными функциями оператора L^2 с собственными значениями $l(l + 1)$:

$$L^2 Y_l^m(\theta, \phi) = l(l + 1) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (17.26)$$

(см., например, [235]). Кроме того, в предположении $\chi \propto Y_l^m$ уравнение (17.24) преобразуется к виду

$$\alpha = \nabla \cdot \delta \mathbf{r} = -\delta \rho / \rho = r^{-2} \partial(r^2 \delta r) / \partial r - l(l + 1)(\sigma r)^{-2} \chi \quad (l = 0, 1, 2, \dots). \quad (17.27)$$

Это выражение для $\text{div} \delta \mathbf{r}$ справедливо как для адиабатических, так и для неадиабатических колебаний.

Случай $l = 0$ соответствует чисто радиальным колебаниям.

Укажем также, что выражения для обоих трансверсальных компонентов δt_θ и δt_ϕ не содержат при таком описании никаких дополнительных функций, как видно из вторых равенств в (17.21б) и (17.21в). Этот результат является простым следствием уравнения импульса (17.4), согласно которому вектор ускорения элемента массы представляется в виде суммы градиента скалярной функции χ и чисто радиального вектора (для сферической звезды).

Для последующего изложения целесообразно получить общее выражение для дивергенции эйлеровой вариации \mathbf{f}' (\mathbf{f} — произвольный вектор), которая в сферической системе координат имеет вид

$$\mathbf{f}' = f'_r \mathbf{e}_r + f'_\theta \mathbf{e}_\theta + f'_\phi \mathbf{e}_\phi \quad (17.28)$$

(подобные рассуждения применимы и к лагранжевой вариации $\delta \mathbf{f}$). Однако для векторов, которые равны сумме градиента скалярной функции и чисто радиального вектора, оба трансверсальных компонента определяются, очевидно, производными по углам от одной и той же функции, которую часто

* Символ m не должен вносить путаницы, несмотря на его использование в других разделах книги для обозначения лагранжевой массовой переменной. Смысл символа m поясняется всякий раз, когда он встречается, или же понятен из контекста.

называют тангенциальным компонентом и которую мы будем обозначать здесь f'_t [примером служат уравнения (17.21б) и (17.21в)]. Таким образом, $f'_\theta = \partial f'_t / \partial \theta$, $f'_\phi = (\sin \theta)^{-1} \partial f'_t / \partial \phi$. Если f'_t представляет собой произведение функции, зависящей только от r , и сферической гармоники Y_l^m , то можно записать также

$$f'_\theta = f'_t (1/Y_l^m) \partial Y_l^m / \partial \theta, \quad f'_\phi = f'_t (1/Y_l^m) (1/\sin \theta) \partial Y_l^m / \partial \phi. \quad (17.29)$$

Следовательно, вектор \mathbf{f}' можно представить в виде

$$\mathbf{f}' = f'_r \mathbf{e}_r + f'_t \mathbf{t}, \quad (17.30)$$

где \mathbf{t} — вектор, лежащий в касательной плоскости (перпендикулярной радиус-вектору):

$$\mathbf{t} = \mathbf{e}_\theta (1/Y_l^m) \partial Y_l^m / \partial \theta + \mathbf{e}_\phi (1/\sin \theta) (1/Y_l^m) \partial Y_l^m / \partial \phi, \quad (17.31)$$

причем этот вектор не является единичным. Таким образом, имеем

$$\nabla \cdot \mathbf{f}' = r^{-2} \partial(r^2 f'_r) / \partial r - r^{-1} l(l+1) f'_t. \quad (17.32)$$

При сравнении (17.32) с (17.27) видно, что тангенциальный компонент вектора $\delta \mathbf{r}$, скажем δt , равен

$$\delta t = \chi / (\sigma^2 r) \quad (17.33)$$

[величина χ определена соотношением (17.23)], а θ - и ϕ -компоненты даются соотношениями (17.29).

Отметим, что в виде произведения сферической гармоники и функции, зависящей только от r , записываются лишь скалярные переменные, связанные с возмущениями.

Стоит упомянуть частный, но важный случай, когда \mathbf{f}' равно градиенту скалярной функции H , которая в свою очередь равна произведению сферической гармоники и функции только от r , например

$$\mathbf{f}' = \nabla H, \quad (17.34)$$

или

$$\mathbf{f}' = \mathbf{e}_r f'_r + \mathbf{t} f'_t, \quad (17.35)$$

где векторы \mathbf{e}_r и \mathbf{t} определены выше и

$$f'_r = \partial H / \partial r, \quad f'_t = H / r. \quad (17.36)$$

Выражение (17.34) представляет собой частный случай *теоремы Гельмгольца*, которая утверждает, что произвольный вектор (удовлетворяющий определенным довольно слабым математическим требованиям, см., например, [444, р. 158]) можно записать в виде суммы градиента скалярного потенциала и ротора векторного потенциала.

Следует отметить, что пропорциональность возмущения сферической гармонике подразумевает существование азимутальной бегущей волны, фазовая скорость которой равна

$$d\phi/dt = -\sigma/m. \quad (17.36') .$$

Полезно также привести результат действия оператора Лапласа $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ на функцию $y(r, \theta, \phi)$, образованную произведением Y_l^m и функции только r :

$$\nabla^2 y = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial y}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} y = r^{-1} \frac{\partial^2 (ry)}{\partial r^2} - l(l+1)r^{-2}y. \quad (17.37)$$

Описанное разделение переменных, на котором основано практически все рассмотрение нерадиальных колебаний звезд, определяет класс сферондальных мод. Вектор $\delta \mathbf{r}$, представляющий смещение элемента массы, удовлетворяет в этом классе мод при $\sigma^2 \neq 0$ соотношению

$$(\nabla \times \delta \mathbf{r})_r = 0, \quad (17.38)$$

где индекс r обозначает радиальную составляющую.

Второй класс — крутильные моды — может быть представлен следующими компонентами смещений:

$$\delta r = 0, \quad (17.39a)$$

$$\delta t_\theta = [T_{l,m}(r)/r \sin \theta] (\partial Y_l^m / \partial \phi) \exp[i\sigma t], \quad (17.39b)$$

$$\delta t_\phi = -[T_{l,m}(r)/r] (\partial Y_l^m / \partial \theta) \exp[i\sigma t], \quad (17.39в)$$

где $T_{l,m}(r)$ — произвольная (но удовлетворяющая граничным условиям) функция радиуса r . В статической сферической звезде крутильные моды не зависят от времени ($\sigma = 0$) и характеризуются тем, что лагранжевы и эйлеровы вариации давления, плотности и гравитационного потенциала тождественно равны нулю. (Действительно, как показано в работе [12], где дано исчерпывающее рассмотрение этих мод, для такой звезды не существует крутильных колебаний с $\sigma \neq 0$.) Эти моды представляют некоторый вид медленного закручивания системы. На их существование впервые указал в 1968 г. Пердаг [436] и обратил особое внимание Саймон [521]; см. также книгу Чандрасекара [72, App. III]. Автор благодарит П.Смейерса (частное сообщение, 1975), привлечшего его внимание к этому классу мод. Для таких мод радиальная составляющая вектора $\nabla \times \delta \mathbf{r}$ не равна нулю ни в одной точке системы:

$$(\nabla \times \delta \mathbf{r})_r = l(l+1)[T_{l,m}(r)/r^2] Y_l^m \exp[i\sigma t]. \quad (17.40)$$

При $l = 1$ крутильные моды могут быть описаны, согласно [12], выражением

$$\delta \mathbf{r} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \exp[i\sigma t], \quad (17.41)$$

где $\boldsymbol{\Omega}$ — в общем случае векторная функция r . При постоянном $\boldsymbol{\Omega}$ эти моды соответствуют твердотельному вращению с постоянной скоростью.

Обычно считается, что сферондальные и крутильные моды образуют вместе полную систему функций (см., например, [203, 290, 521]). Это предположение означает, что произвольную функцию координат можно представить в виде бесконечной суммы таких мод.

В настоящей книге мы не будем подробно рассматривать крутильные моды и всегда будем предполагать, если не оговорено особо, что имеем дело со сферондальными модами.

В случае вращающейся звезды крутильные моды имеют отличные от нуля частоты и переходят в так называемые « g -моды», введенные в работе [418]: Частоты крутильных мод отличны от нуля и в случае, когда звездные недра могут испытывать сдвиговые деформации, например, в частично кристаллизовавшемся белом карлике (см. [258]).

17.4. Порядок уравнений и смежные вопросы

Какой порядок по пространственным переменным имеет система дифференциальных уравнений для малых нерадиальных неадиабатических колебаний? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим четыре основных дифференциальных уравнения и перечислим различные неизвестные. Мы имеем следующие уравнения:

Уравнение неразрывности. Это скалярное дифференциальное уравнение первого порядка, в которое входят ρ' и три компонента вектора $\delta \mathbf{r}$ [см., например, (5.29a)].

Уравнение импульса. Это векторное дифференциальное уравнение первого порядка, включающее величины $d^2 \delta \mathbf{r} / dt^2$, P' , ρ' и ψ' и соответствующее трем скалярным уравнениям первого порядка [см., например, (5.31)].

Уравнение энергии. Вариацию удельной энтропии δs можно исключить из этого уравнения [см., например, (5.35a)], подействовав на него оператором d/dt и подставив уравнение (17.1). В результате получается скалярное дифференциальное уравнение первого порядка (по пространственным переменным), включающее величины P' , ρ' , ϵ' и по три компонента векторов $\delta \mathbf{r}$ и \mathbf{F}' . Соотношение между ϵ' , ρ' и T' — это обычно всего лишь алгебраическое уравнение, получаемое из выражения для скорости генерации энергии $\epsilon = \epsilon(\rho, T)$ (см., например, разд. 4.3).

Уравнение потока энергии. В явном виде это уравнение еще не приводилось, поскольку не известно его конкретного представления в наиболее общем случае (когда учитывается конвективный перенос). Однако для случая лучистого переноса (в диффузионном приближении) и при учете теплопроводности это уравнение известно [см., например, (4.41)]. В данном случае можно видеть (разд. 17.14), что уравнение для \mathbf{F}' является векторным дифференциальным уравнением первого порядка, включающим величины ρ' , T' и по три компонента векторов $\delta \mathbf{r}$ и \mathbf{F}' , т.е. оно соответствует трем скалярным дифференциальным уравнениям первого порядка. Соотношение между P' , ρ' и T' — это обычно всего лишь алгебраическое уравнение, которое можно получить из уравнения состояния вещества, $P = P(\rho, T)$ (см., например, разд. 4.2).

Уравнение Пуассона. Для наших целей это уравнение удобнее рассмотреть как два дифференциальных уравнения первого порядка: одно — векторное уравнение, получаемое, если взять эйлерову вариацию от уравнения (17.2), а другое — скалярное, получаемое при линеаризации уравнения (17.3). Следовательно, уравнение Пуассона эквивалентно четырем скалярным дифферен-

* См. также Saio H. *Astrophys. J.*, 256, 717, 1982. — Прим. перев.

циальным уравнениям первого порядка для величины ψ' и трех компонент вектора \mathbf{f}' , представляющего эйлерову вариацию силы гравитации на единицу массы.

Таким образом, зависимыми переменными являются, например, P' , ρ' , ψ' и три компонента каждого из векторов $\delta\mathbf{r}$, \mathbf{F}' и \mathbf{f}' , т.е. всего 12 скалярных переменных. [Конечно, вместо эйлеровых вариаций в качестве зависимых переменных всегда можно использовать лагранжевы вариации, поскольку есть соотношение (5.16), связывающее оба типа вариаций.] Итак, всего имеется 12 скалярных дифференциальных уравнений первого порядка по пространственным координатам, и поэтому мы имеем систему 12-го порядка. Однако, как мы видели в гл. 9, при неадиабатических колебаниях каждая зависимая переменная должна быть комплексной, т.е. фактически мы имеем систему 24-го порядка в вещественных переменных.

Предположение о том, что каждая скалярная переменная пропорциональна сферической гармонике $Y_l^m(\theta, \phi)$, позволяет исключить шесть переменных (по два компонента векторов $\delta\mathbf{r}$, \mathbf{F}' и \mathbf{f}') и шесть уравнений: два уравнения импульса, два — потока, и два — ускорения силы тяжести [оба тангенциальных компонента каждого вектора можно представить в виде алгебраических выражений для скалярных переменных, см., например, уравнения (17.21б) и (17.21в)]. Тогда мы получаем систему 6-го порядка в комплексных переменных, или 12-го порядка в вещественных переменных.

Другая точка зрения по этому же вопросу изложена в разд. 18.1.

В адиабатическом приближении уравнение энергии не используется, а поэтому отсутствуют уравнения для потока энергии. Следовательно, система будет лишь 4-го порядка в комплексных переменных. Однако в случае адиабатических колебаний каждую зависимую переменную можно рассматривать как чисто вещественную (гл. 8), т.е. в этом приближении мы имеем фактически систему 4-го порядка в вещественных переменных. Причина, по которой соответствующая задача для радиальных колебаний оказывается задачей только второго порядка, состоит в том, что для таких колебаний уравнение Пуассона допускает тривиальное решение (гл. 6). Далее мы всюду будем рассматривать адиабатические колебания, если не оговорено иначе.

Важно отметить, что поскольку порядок m сферической гармоники не входит ни в одно из уравнений задачи (как адиабатической, так и неадиабатической), собственные значения малых нерадиальных колебаний статических звезд оказываются вырожденными по m : для каждого значения l существует $2l + 1$ значение m . И при отсутствии возмущений, таких, как вращение или магнитные поля (гл. 19), все эти собственные значения для данного l совершенно одинаковы.

Перейдем теперь к описанию общих методов решения.

17.5. Методы решения для моделей общего вида

В этом разделе мы представим некоторые уравнения малых адиабатических нерадиальных колебаний сферических звезд (с учетом предположений,

сделанных в гл. 15) в форме, в которой они использовались для звездных моделей общего вида. Первая форма уравнений (п. 17.5а) описана Леду и Вальravenом [345, § 79] и использована, например, Смейерсом [524]. Вторая форма (п. 17.5б) была выведена Дзембовским [187], и ее использовали, например, Осаки и Хансен [410].

17.5а. ПЕРВАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ

Чтобы получить это представление, объединим уравнения энергии и неразрывности, а также используем уравнение импульса для радиальной составляющей поля смещений и уравнение Пуассона. Вводя новые переменные

$$u = r^2 \delta r, \quad (17.42)$$

$$y = P'/\rho, \quad (17.43)$$

легко показать, что все три уравнения: импульса, неразрывности и уравнение Пуассона соответственно — после некоторых преобразований принимают вид

$$dy/dr = [(\sigma^2 + Ag)/r^2]u - Ay - d\psi'/dr, \quad (17.44)$$

$$du/dr = (\rho g/\Gamma_1 P)u + [l(l+1)/\sigma^2 - r^2\rho/\Gamma_1 P]y + [l(l+1)/\sigma^2]\psi', \quad (17.45)$$

$$r^{-2}d(r^2 d\psi'/dr)/dr = -(4\pi G\rho A/r^2)u + (4\pi G\rho^2/\Gamma_1 P)y + [l(l+1)/r^2]\psi'. \quad (17.46)$$

В этих уравнениях зависимые переменные u , y и ψ' рассматриваются как функции только от r , т.е. считается, что все уравнения сокращены на общий множитель $Y_l^m(\theta, \phi)$. Очевидно, что эти дифференциальные уравнения образуют систему четвертого порядка.

Поскольку эти уравнения применимы, по-видимому, при любом значении l , они должны описывать как частный случай адиабатические чисто радиальные колебания, характеризуемые значением $l = 0$ и подробно рассмотренные в гл. 8. Справедливость данного утверждения была продемонстрирована в явном виде Смейерсом [524]. Поэтому в дальнейшем большинство замечаний будет ограничиваться случаем $l > 0$.

17.5б. ВТОРАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ

Чтобы получить это представление дифференциальных уравнений (17.44) — (17.46), определим, согласно Дзембовскому [187], четыре безразмерные зависимые переменные

$$y_1 = \delta r/r, \quad y_2 = (1/gr)(P'/\rho + \psi'), \quad y_3 = (1/gr)\psi', \quad y_4 = (1/g)d\psi'/dr, \quad (17.47)$$

где g — локальное ускорение силы тяжести. Мы используем также безразмерную угловую частоту Ω [уравнение (8.20)] и определим безразмерную функцию

$$c_1 = (r/R)^3 M/m, \quad (17.48)$$

где m — масса внутри сферы радиуса r . Кроме того, используем безразмерные переменные теории внутреннего строения звезд (см., например, [71])

$$U = d \ln m/d \ln r, \quad V = -d \ln P/d \ln r = gr\rho/P, \quad (17.49)$$

где второе равенство в выражении для V относится к сферическим звездам в

состоянии гидростатического равновесия. Тогда дифференциальные уравнения (17.44) — (17.46) преобразуются в следующую систему четырех уравнений первого порядка:

$$rdy_1/dr = (V/\Gamma_1 - 3)y_1 + [l(l+1)/c_1\Omega^2 - V/\Gamma_1]y_2 + (V/\Gamma_1)y_3, \quad (17.50)$$

$$rdy_2/dr = (c_1\Omega^2 + Ar)y_1 + (1 - U - Ar)y_2 + Ary_3, \quad (17.51)$$

$$rdy_3/dr = (1 - U)y_3 + y_4, \quad (17.52)$$

$$rdy_4/dr = -UAr y_1 + (UV/\Gamma_1)y_2 + [l(l+1) - UV/\Gamma_1]y_3 - Uy_4, \quad (17.53)$$

где снова все уравнения уже сокращены на общий множитель $Y_l^m(\theta, \phi)$.

В приведенной формулировке представлены четыре дифференциальных уравнения первого порядка (вместо двух уравнений первого порядка и одного уравнения второго порядка, как в предыдущей формулировке), поскольку уравнение Пуассона эквивалентно двум дифференциальным уравнениям первого порядка (разд. 17.1).

17.6. Граничные условия

В этом разделе мы рассмотрим граничные условия как в центре (п. 17.6а), так и на поверхности (п. 17.6б) в случае малых адиабатических колебаний сферических звезд, для которых справедливы все три предположения, сделанные в разд. 15.2. (Однако для общности мы не будем в явном виде предполагать, что плотность на поверхности системы обращается в нуль.) Мы увидим, и это неудивительно, что граничные условия оказываются более сложными, чем для чисто радиальных колебаний, рассмотренных в гл. 8. В большей части этого раздела будем принимать, что $l > 0$. Кроме того, будем использовать преимущественно переменные u , y и ψ' , введенные в разд. 17.5а.

17.6а. ЦЕНТР ЗВЕЗДЫ

Переходя к анализу решения уравнений (17.44) — (17.46) вблизи центра звезды, сначала заметим, что в сферической звезде величины A , g , dp/dr и dP/dr вблизи центра пропорциональны r , а величины ρ , P и Γ_1 по мере приближения к центру стремятся к конечным значениям. Поэтому при $r \rightarrow 0$ величина Ag в уравнении (17.44) становится малой по сравнению с σ^2 , а второй член в квадратных скобках в уравнении (17.45) становится малым по сравнению с первым.

Предположим теперь, что вблизи центра справедливы разложения

$$y = r^\nu \sum_{\nu=0}^{\infty} Y_\nu r^\nu, \quad (17.54a)$$

$$u = r^\nu \sum_{\nu=0}^{\infty} U_\nu r^\nu, \quad (17.54б)$$

$$\psi' = r^\nu \sum_{\nu=0}^{\infty} \Psi_\nu r^\nu, \quad (17.54в)$$

где Y_r , U_r и Ψ_r — постоянные, которые надлежит определить, причем предполагается, что все ряды сходятся. Допустим, что по крайней мере две из трех зависимых переменных, скажем δr и P' , остаются конечными при $r = 0$. Тогда дифференциальные уравнения требуют, чтобы и третья переменная, в данном случае ψ' , также оставалась конечной при $r = 0$, что следует также из физических соображений. Поскольку поведение зависимых переменных вблизи центра ($r = 0$) определяется показателями a , b и c в разложениях (17.54), чтобы удовлетворить этим центральным граничным условиям, мы должны иметь $a \geq 0$, $b \geq 2$ и $c \geq 0$. Из соотношения (17.54а) следует, что при $r \rightarrow 0$ $\delta P \propto r^a$, а для адиабатических колебаний и $\rho' \propto r^a$.

Однако поскольку наши зависимые переменные должны удовлетворять дифференциальным уравнениям, величины a , b и c должны быть связаны друг с другом. Действительно, можно показать, что при $l \neq 0$

$$c = b - 1 = a. \quad (17.55)$$

Подставим теперь разложения (17.54а) — (17.54в) в дифференциальные уравнения (17.44) — (17.46) с учетом соотношения (17.55) и приравняем коэффициенты при наинизших степенях r , считая величины ρ , P и Γ_1 вблизи $r = 0$ постоянными. Получим

$$aY_0 = \sigma^2 U_0 - a\Psi_0, \quad (17.56)$$

$$(a+1)U_0 = [l(l+1)/\sigma^2](Y_0 + \Psi_0). \quad (17.57)$$

$$a(a+1)\Psi_0 = l(l+1)\Psi_0. \quad (17.58)$$

Последнее условие дает при $l \neq 0$ и при $\Psi_0 \neq 0$

$$a = l, -l - 1. \quad (17.59)$$

Уравнения (17.56) и (17.57) приводят к такому же результату, если $U_0 \neq 0$. Значение $a = -l - 1$ следует отбросить, чтобы избежать особенностей в точке $r = 0$. Тогда, чтобы удовлетворить граничным условиям при $r = 0$, разложения (17.54а) — (17.54в) для $l \neq 0$ должны иметь следующий вид:

$$\delta r = r^{l-1} \sum_{r=0}^{\infty} U_r r^r, \quad (17.60a)$$

$$P'/\rho = r^l \sum_{r=0}^{\infty} Y_r r^r, \quad (17.60б)$$

$$\psi' = r^l \sum_{r=0}^{\infty} \Psi_r r^r. \quad (17.60в)$$

Отметим также, что мы имеем следующее условие [см. соотношение (17.56)]:

$$\sigma_0^2 U_0 = l(Y_0 + \Psi_0). \quad (17.61)$$

Следовательно, для заданных σ^2 и l граничные условия в центре оставляют неопределенными две из трех постоянных U_0 , Y_0 , Ψ_0 . Как мы увидим в п. 17.6б, значения двух этих постоянных должны быть выбраны так, чтобы выполнялись граничные условия на поверхности звезды.

В центре звезды существует интересная связь между радиальной (δr) и тангенциальной (δt) составляющими лагранжева смещения δg . На основании соотношения (17.33) имеем $\delta t = (P'/\rho + \psi')/(\sigma^2 r)$. Подставляя сюда разложение (17.60а) — (17.60в), ограничиваясь первыми членами и учитывая условие (17.61), получаем для $r = 0$

$$\delta t = (\delta r)/l. \quad (17.62)$$

Выражение (17.62) — это лишь частный случай более общего соотношения, выполняющегося для любого вектора, пропорционального градиенту скалярной величины, которая в свою очередь пропорциональна сферической гармонике. Если F_r и F_t — тангенциальная и радиальная составляющие такого вектора \mathbf{F} [см. выражение (17.30)], то более общий результат, получаемый из требования, чтобы величина $\nabla \cdot \mathbf{F}$ была при $r = 0$ конечной (см. ниже), состоит в следующем:

$$(F_r/F_t)_{r=0} = l. \quad (17.62')$$

Граничные условия в центре, полученные довольно формально, можно рассмотреть с физической точки зрения. Отметим, что в данном случае линейных нерадиальных адиабатических колебаний фигурируют лишь два вектора: лагранжево смещение δg элемента массы и сила, скажем, \mathbf{f}' , связанная с эйлеровой вариацией ψ' гравитационного потенциала и отнесенная к единице массы: $\mathbf{f}' = -\nabla \psi'$. Кроме того, встречаются две дивергенции: $\nabla \cdot \delta g$ в уравнении неразрывности и $\nabla \cdot \mathbf{f}'$ в уравнении Пуассона. Тогда требование, чтобы величины $\delta \rho$ и ρ' оставались конечными при $r = 0$, приводит к требованию, чтобы обе дивергенции также оставались конечными в этой точке. Можно показать, что для выполнения последнего требования необходимо и достаточно, чтобы поведение переменных вблизи центра описывалось разложением (17.60а) — (17.60в) [см. также соотношение (17.62')].

Можно заметить, что нерадиальные колебания ($l > 0$) отличаются от радиальных ($l = 0$) тем, что в центре ($r = 0$) обе вариации P' и δP должны обращаться в нуль в первом случае, но не во втором. Кроме того, для нерадиальных колебаний $\delta r = 0$ в точке $r = 0$ только при $l > 1$. «Дипольная» мода $l = 1$, для которой $\delta r \neq 0$ при $r = 0$, соответствует смещению геометрического центра конфигурации. Для несжимаемой жидкости этот случай соответствует перемещению всей конфигурации. Однако для сжимаемой жидкости этот случай может соответствовать и такому смещению, при котором центр системы остается неподвижным, что впервые показал Смейерс [523] (см. также разд. 17.8). Простой пример таких колебаний при $m = 0$ — это стоящий на льду человек на коньках, который держит в руках тяжелые гантели и сгибает и разгибает обе руки одновременно прямо перед собой. В этом случае положение центра масс человека периодически изменяется, но центр масс системы остается неподвижным. Другой пример — человек, расхаживающий взад и вперед по плоту, плавающему на воде. Для $m = \pm 1$ простой пример колебаний с $l = 1$ — это человек на коньках, который держит гантели на фиксированном расстоянии перед собой и при этом вращается вокруг вертикальной осн. Еще один подобный пример — система Земля — Луна:

центр Земли смещен относительно центра масс системы на расстояние около 4500 км, а прямая линия, соединяющая Луну с Землей, вращается с лунным сидерическим периодом вокруг центра масс системы.

Чтобы получить рекуррентные соотношения для коэффициентов в разложениях (17.60а) — (17.60в) при $\nu > 0$, необходимо представить коэффициенты, входящие в дифференциальные уравнения (17.44) — (17.46), в виде рядов по степеням r . Конечно, значения этих коэффициентов зависят от свойств невозмущенной модели. Считая модель сферически симметричной, можно записать, что вблизи $r = 0$

$$A/r = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{2\nu} r^{2\nu}, \quad (17.63a)$$

$$Ag/r^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_{2\nu} r^{2\nu}, \quad (17.63б)$$

$$\rho/(\Gamma_1 P) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{2\nu} r^{2\nu}, \quad (17.63в)$$

$$\rho = \sum_{\nu=0}^{\infty} D_{2\nu} r^{2\nu}, \quad (17.63г)$$

$$\rho g/(r\Gamma_1 P) = \sum_{\nu=0}^{\infty} E_{2\nu} r^{2\nu}, \quad (17.63д)$$

где коэффициенты разложений предполагаются известными из свойств невозмущенной модели. Подставляя эти разложения и разложения (17.60а) — (17.60в) в уравнения (17.44) — (17.46), получаем в случае $l \neq 0$ следующие уравнения:

$$\begin{aligned} r^{l-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} [(l+\nu)(Y_{\nu} + \Psi_{\nu}) - \sigma^2 U_{\nu}] r^{\nu} = \\ = r^{l+1} \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} (B_{2\mu} U_{\nu} - A_{2\mu} Y_{\nu}) r^{2\mu+\nu}, \quad (17.64) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r^l \sum_{\nu=0}^{\infty} [(l+1+\nu)U_{\nu} - l(l+1)(Y_{\nu} + \Psi_{\nu})/\sigma^2] r^{\nu} = \\ = r^{l+2} \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} (E_{2\mu} U_{\nu} - C_{2\mu} Y_{\nu}) r^{2\mu+\nu}, \quad (17.65) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r^{l-2} \sum_{\nu=0}^{\infty} [\nu(2l+1+\nu)] \Psi_{\nu} r^{\nu} = \\ = -4\pi G r^l \sum_{\mu, \nu, \xi=0}^{\infty} [D_{2\mu}(A_{2\nu} U_{\xi} - C_{2\nu} Y_{\xi})] r^{2\mu+2\nu+\xi}. \quad (17.66) \end{aligned}$$

Разложения в левой части начинаются с членов, порядок которых на две единицы меньше, чем порядок соответствующих членов в правой части. Поэтому в левой части коэффициенты при r^ν для $\nu = 0$ и $\nu = 1$ должны обращаться в нуль. Приравнивание нулю коэффициента с $\nu = 0$ в формуле (17.64) приводит к соотношению (17.61). Это же соотношение получается из уравнения (17.65), а коэффициент при r^0 в уравнении (17.66) просто равен 0. Приравнивание нулю коэффициентов в (17.64) — (17.66) с $\nu = 1$ дает $U_1 = 0$, $Y_1 = 0$ и $\Psi_1 = 0$, что является следствием предположения о сферической симметрии невозмущенной модели. Это предположение определило также вид разложений (17.63а) — (17.63д), принятых для параметров невозмущенной модели.

Приравнивание нулю коэффициентов при следующих степенях r в (17.64) — (17.66) дает, наконец, первые рекуррентные соотношения:

$$(l+2)(Y_2 + \Psi_2) - \sigma^2 U_2 = B_0 U_0 - A_0 Y_0, \quad (17.67a)$$

$$(l+3)U_2 - l(l+1)(Y_2 + \Psi_2)/\sigma^2 = E_0 U_0 - C_0 Y_0, \quad (17.67б)$$

$$(2l+3)\Psi_2 = -2\pi G D_0 (A_0 U_0 - C_0 Y_0). \quad (17.67в)$$

Из этих уравнений для заданных l и σ^2 можно выразить значения U_2 , Y_2 и Ψ_2 , например, через U_0 и Y_0 [см. уравнения (17.56) — (17.58)] и через несколько первых членов в разложениях (17.63), характеризующих невозмущенную модель. Аналогичная процедура для следующих степеней r дает $U_3 = 0$, $Y_3 = 0$ и $\Psi_3 = 0$; и вообще все коэффициенты U_ν , Y_ν и Ψ_ν при нечетных ν оказываются равными нулю. Продолжая подобные действия, мы приходим к выводу, что можно вычислить столько коэффициентов в разложениях (17.60а) — (17.60в), сколько необходимо. В результате получаются степенные ряды с известными коэффициентами, представляющие для заданных l и σ^2 решение уравнений (17.44) — (17.46) вблизи центра звезды.

17.66. ПОВЕРХНОСТЬ ЗВЕЗДЫ

На поверхности сферической звезды имеем $r = R$, где R — равновесный радиус звезды (иногда его помечают индексом 0), который здесь предполагается постоянным. Как уже отмечалось выше (см. гл. 15 и начало настоящей главы), предположение об отсутствии давления на поверхности, $P = 0$, обычно является вполне удовлетворительным и используется почти во всех случаях. Это предположение требует, чтобы лагранжева вариация давления также обращалась в нуль на поверхности:

$$\delta P = 0. \quad (17.68)$$

Поскольку вектор ∇P_0 в сферической звезде имеет лишь радиальную составляющую dP_0/dr , которая на поверхности обращается в нуль, если плотность там равна нулю, тогда и эйлерова вариация давления на поверхности $P' = 0$. Более общие граничные условия на поверхности рассматриваются в гл. 3 книги Уинни и др. [593].

Граничное условие на поверхности (17.68) иногда записывают в более развернутом виде. Для существования регулярных решений (а лишь они обычно

интересны с физической точки зрения) необходимо, чтобы $\delta P/P$ всюду, в том числе и на поверхности звезды оставалось конечным, если давление $P_0 = 0$ на поверхности невозмущенной модели (точнее, обычно предполагают, что на поверхности невозмущенной модели становится малым или обращается в нуль отношение P/ρ). В полной аналогии со случаем чисто радиальных колебаний, рассмотренных в гл. 8, значение $\delta P/P$ на поверхности, согласующееся с граничным условием (17.68), можно и в случае нерадиальных колебаний определить на основе линеаризованного уравнения импульса. Как и в случае чисто радиальных колебаний, это значение можно найти двумя способами, что подчеркивал Дзембовский [187]:

а. Можно рассмотреть адиабатические нерадиальные колебания изотермической атмосферы (как в разд. 8.4). Тогда $\delta P/P$ определится из условия, что при $r \rightarrow \infty$ акустическая энергия на единицу объема остается конечной. (Это условие иногда называют условием отражения, см., например, [19].)

б. Можно использовать само линеаризованное уравнение импульса и из него непосредственно получить значение $\delta P/P$ на поверхности до некоторой степени подобно тому, как было сделано в разд. 8.3 для случая чисто радиальных колебаний.

Результаты подхода (б) применимы и к неадиабатическим колебаниям (гл. 18), а потому являются более общими, чем в подходе (а). Кроме того, метод (б) намного проще для вычислений. Метод (а) был использован в работах [19, 271] (см. также [269]) для нахождения граничного условия отражения. Здесь же мы представим результаты использования метода (б).

По-видимому, лучше всего начать с линеаризованного уравнения импульса в форме (5.32), причем силу на единицу массы возьмем равной $\mathbf{f} = -\nabla\psi$, где ψ — гравитационный потенциал. Рассмотрим только случай, когда в невозмущенном состоянии звезда является статической и сферически симметричной. Поэтому можно заменить d/dt на $\partial/\partial t$; будем предполагать также, что все вариации пропорциональны $\exp(i\omega t)$. Тогда после некоторых преобразований линеаризованное уравнение импульса можно разрешить относительно $\nabla(\delta P/P)$, если использовать уравнение неразрывности в форме (17.22) и (17.27) и уравнение импульса для невозмущенной модели $(\nabla P)/\rho = \mathbf{g}$. Правую часть полученного выражения можно представить как произведение $(1/\lambda_p)$ на величину, содержащую, в частности, $\delta P/P$, где $\lambda_p = P/(\rho g)$ — высота однородной атмосферы, а g — локальное ускорение силы тяжести [см. (17.11)]. [Полученное выражение аналогично (8.10).] Поскольку вблизи поверхности $|\nabla(\delta P)/P|$ должно оставаться конечным, а λ_p мало или равно нулю, то и величина, на которую умножается $(1/\lambda_p)$, также должна быть малой или равной нулю. Приравнявая радиальный компонент этой величины нулю и разрешая относительно $\delta P/P$, получим

$$\delta P/P = -(\sigma^2 r^3/Gm + 4 - 4\pi\rho^3/m)\delta r/r + \\ + [l(l+1)/\sigma^2 r^2](P'/\rho + \psi') + g^{-1}\partial\psi'/\partial r, \quad (17.69)$$

что выполняется по крайней мере с точностью до множителя $[1 + O(\lambda_p/R)]$ для всей правой части, где функция $O(\lambda_p/R)$ может представлять собой ряд

по степеням (λ_P/R) , главный член которого порядка λ_P/R . [Уравнение (17.69) аналогично уравнению (8.11).] Значение $\delta P/P$ на поверхности получают при подстановке в правую часть поверхностных значений соответствующих величин. В частности, значение $\partial\psi'/\partial r$ на поверхности можно исключить из (17.69) с помощью граничного условия (17.71).

Уравнение, получающееся после исключения $\partial\psi'/\partial r$, представляет определенный интерес, и оно было проанализировано в [59]. Предполагая, что на поверхности $\delta P = 0$, мы после некоторых преобразований находим

$$\delta P/P = [l(l+1)Gm/\sigma^2 r^3 - \sigma^2 r^3/Gm - 4]\delta r/r + \\ + [l(l+1)Gm/\sigma^2 r^3 - l - 1]\psi'/gr. \quad (17.69')$$

В приближении Каулинга (разд. 17.9) остается только член с $\delta r/r$.

Для чисто радиальных колебаний $l = 0$, и легко показать, что

$$\partial\psi'/\partial r = -4\pi G\rho\delta r. \quad (17.70)$$

Следовательно, в этом случае уравнение (17.69) точно сводится к уравнению (8.11).

Уравнения (17.68) или (17.69), или (17.69') дают одно граничное условие на поверхности (в радиальном случае только это условие и требуется, см. гл. 8). Второе граничное условие на поверхности связано с возмущением ψ' гравитационного потенциала. В [345, §75] показано, что это граничное условие имеет вид

$$\partial\psi'/\partial r + \psi'(l+1)/R = -4\pi G\rho\delta r. \quad (17.71)$$

Уравнения (17.68) или (17.69) или (17.69') и (17.71) — это те два граничных условия, которые должны выполняться на поверхности сферически симметричной конфигурации в случае малых адиабатических нерадиальных колебаний при отсутствии давления на поверхности. Физически второе условие выражает требование, чтобы как эйлерова вариация гравитационного потенциала, так и ускорение силы тяжести были непрерывными при пересечении поверхности звезды, деформированной возмущениями. Выполнение этих условий при заданных l и σ^2 позволяет найти два параметра, которые остались неопределенными в центральных граничных условиях, рассмотренных в п. 17.6а.

Два граничных условия для центра звезды состоят в том, что какие-либо две из зависимых переменных должны оставаться конечными в центре. Таким образом, условия в центре и на поверхности вместе образуют четыре граничных условия, которые должны выполняться для рассматриваемых колебаний. Однако, поскольку наша система дифференциальных уравнений имеет четвертый порядок и является однородной, одна из четырех постоянных интегрирования должна оставаться произвольной вследствие произвольной нормировки. А тогда все четыре граничных условия могут выполняться только при определенных значениях σ^2 . Таким образом, мы опять имеем задачу о собственных значениях, и собственным значением является σ^2 . Однако, за исключением некоторых предельных случаев (разд. 17.9), уравнения неради-

альных колебаний не образуют системы Штурма — Лиувилля, и поэтому, как правило, не существует простого и однозначного метода упорядочения собственных значений.

Наконец, интересно рассмотреть значение $\delta t / \delta r$ на поверхности звезды, где δt и δr — соответственно тангенциальная и радиальная составляющие лагранжева смещения $\delta \mathbf{r}$ элемента массы. Легко показать, что

$$(\delta t / \delta r)_{r=R} = \Omega^{-2} [1 + \psi' / (P' / \rho)]_{r=R}, \quad (17.72)$$

Ω^2 — безразмерная угловая частота, определенная в гл. 8.

Поскольку $|\psi' / (P' / \rho)|$ порядка единицы (кроме того, величиной ψ' часто вообще пренебрегают, см. разд. 17.9), $(\delta t / \delta r)_{r=R} \propto \Omega^{-2}$.

17.7. Однородная сжимаемая модель

Однородная сжимаемая модель (во всех точках которой плотность одинакова), разумеется, очень далека от действительности. Тем не менее она представляет интерес, поскольку для этой модели дифференциальные уравнения малых адиабатических нерадиальных колебаний можно свести к системе второго порядка по пространственным координатам. А решение дифференциальных уравнений сравнительно низкого порядка можно найти в виде довольно простых степенных рядов. Отметим, что для однородной модели не выполняется предположение $\rho = 0$ на поверхности, сделанное в гл. 15. Однако остальные предположения по-прежнему остаются в силе.

Первым рассмотрел эту модель Пекерис [432], и хорошее краткое изложение его работы можно найти в [345, §76]. Пекерис взял линеаризованные уравнения неразрывности, импульса и уравнение Пуассона для сферически симметричной модели общего вида, находящейся в гидростатическом равновесии, и объединил их с линеаризованным уравнением энергий для адиабатических колебаний. В результате получилась система из двух дифференциальных уравнений второго порядка относительно δr и $\alpha \equiv \nabla \cdot \delta \mathbf{r}$ ($= -\delta \rho / \rho$) (разд. 17.1). В случае однородной модели эти два уравнения не связаны друг с другом и одно из них становится дифференциальным уравнением второго порядка, зависящим только от α . Пекерис представил его общее решение в виде степенного ряда. Требуется, чтобы этот ряд удовлетворял граничным условиям, приводят к довольно простым аналитическим формулам для собственных частот колебаний. Эти формулы дают предварительное представление о так называемых p - и g -модах нерадиальных колебаний, которые будут рассматриваться ниже в данном и последующих разделах книги.

Для однородной модели при $r \leq R$, где R — равновесный радиус звезды, имеем

$$\rho(r) = \text{const} = \rho_0, \quad (17.73)$$

$$P(r) = \frac{3}{8}\pi G \rho_0^2 R^2 (1 - r^2/R^2), \quad (17.74)$$

$$A = -(\Gamma_1 P)^{-1} dP/dr \ (\geq 0). \quad (17.75)$$

Упомянутое выше дифференциальное уравнение второго порядка относительно α при $\Gamma_1 = \text{const}$ можно записать в виде [345, eq.(76.6)]

$$(R^2 - r^2)\partial^2\alpha/\partial r^2 + \partial\alpha/\partial r[(2R^2 - 6r^2)/r + \\ + \alpha(2\Omega^2/\Gamma_1 + 8/\Gamma_1 - 6 - 2l(l+1)/\Gamma_1\Omega^2 - l(l+1)(R^2 - r^2)/r^2) = 0.$$

Представление решения этого уравнения в виде степенного ряда показывает, что вблизи центра $\alpha \propto r^l$. Собственные частоты модели определяются тогда из условия, что степенной ряд должен быть некоторым конечным полиномом (Пекерис [432] показал, что при $r = R$ бесконечный степенной ряд расходится). Это условие имеет вид

$$\Omega^2 - l(l+1)/\Omega^2 = -4 + \Gamma_1[n(2l+2n+5) + 2l+3] = 2D_n \quad (n=0,1,2,\dots), \quad (17.76)$$

где для краткости правая часть записана как $2D_n$. Здесь Ω — безразмерная собственная частота, введенная в гл. 8. При $l = 0$ уравнение (17.76), как и следовало ожидать, дает собственные частоты радиальных пульсаций (гл. 8).

Уравнение (17.76) является квадратичным относительно Ω^2 , и его решения

$$\Omega_{l,n}^2 = D_n \pm [D_n^2 + l(l+1)]^{1/2}. \quad (17.77)$$

Отметим, что при заданных l и n один из двух корней всегда отрицательный, это соответствует динамической неустойчивости. Как мы увидим ниже (разд. 17.12), такое поведение связано с тем, что вся однородная модель конвективно неустойчива ($A > 0$).

Рассмотрим теперь колебания при больших n для фиксированного l . Тогда при $n \gg 1$ две совокупности корней уравнения (17.77) таковы:

$$\Omega_{l,n}^2 \approx 2\Gamma_1 n^2 + l(l+1)/2\Gamma_1 n^2 \quad (p\text{-моды}), \quad (17.78a)$$

$$\Omega_{l,n}^2 \approx -l(l+1)/2\Gamma_1 n^2 \quad (g\text{-моды}). \quad (17.78b)$$

Таким образом, для заданного l существуют два спектра, один из которых соответствует динамически устойчивым модам и характеризуется тем, что при $n \rightarrow \infty$ собственные значения Ω^2 стремятся к бесконечности; другой спектр соответствует динамически неустойчивым модам и характеризуется тем, что при $n \rightarrow \infty$ собственные значения стремятся к нулю. Первую совокупность собственных значений и собственных функций называют p -модами, вторую — g -модами. (Ниже мы увидим, что g -моды не всегда являются динамически неустойчивыми.)

Эта терминология, введенная Каулингом [109], основана на следующих фактах, не все из которых имеют отношение к рассматриваемой однородной сжимаемой модели (см. ниже). p -моды являются преимущественно радиальными и характеризуются относительно большими эйлеровыми вариациями давления и плотности; их иногда называют акустическими модами. g -моды преимущественно трансверсальные и характеризуются относительно малыми эйлеровыми вариациями давления и плотности; их иногда называют гравитационными модами. Хилл [268] сравнивает эти моды с качающимися на воде поплавком. То, что для g -мод движения являются преимущественно трансверсальными, легко увидеть, например, из уравнения (17.14), где пренебрега-

ется величинами P' и ψ' . Согласно этому уравнению, ускорение элемента массы пропорционально составляющей δr вектора $\delta \mathbf{r}$, направленной вдоль вектора ускорения силы тяжести \mathbf{g} , которое для сферической звезды в гидростатическом равновесии в свою очередь направлено радиально. Малая величина ускорения элемента массы (оно пропорционально $|\sigma^2|$ для g -мод высокого порядка) требует, чтобы движение характеризовалось малыми радиальными, а значит, в основном трансверсальными смещениями. По словам Каулинга [109], «...движение (соответствующее g -модам) является главным образом горизонтальным и обусловлено стремлением силы тяжести сгладить различия плотностей на любой сфере, concentричной со звездой». Отметим, что для g -мод с очень большими периодами адиабатическое приближение может оказаться не очень хорошим. Другие доводы в пользу того, что p -моды преимущественно радиальные, а g -моды — трансверсальные, будут представлены в разд. 17.12.

С другой стороны, при $l = n$ и $n \gg 1$ имеем для g -мод выражение

$$\Omega_{n,n}^2 \approx -1/(4\Gamma_1), \quad (17.79)$$

которое от n не зависит. Физически этот случай соответствует движению элементов вещества, размер которых во всех направлениях приблизительно одинаков и намного меньше звездного радиуса. Как мы увидим, можно считать, что g -моды с большими l и n описывают, по крайней мере в некотором смысле, конвекцию. Независимость $\Omega_{n,n}^2$ от n в этом пределе соответствует тому обстоятельству, что частота Брунта — Вайсяля (разд. 17.2) не зависит от размеров элемента жидкости.

Как следует из уравнений, представленных в [345, §76], для однородной модели каждая пара p - и g -мод с заданными l и n имеет одну и ту же собственную функцию $\alpha_{l,n}$ ($= -\delta\rho/\rho_0 = -\rho'/\rho_0$ для однородной модели). То же справедливо и для $\psi'_{l,n}$ и $\delta P_{l,n}$, но не для $\delta r_{l,n}$.

Рассмотрение этого случая в [488] (краткое изложение см. в [345, §76]) показало следующее.

Для p -мод δr имеет на один узел больше, чем α , а для g -мод обе эти величины имеют одинаковое число узлов. Для самых низших ($n = 0$) p - и g -мод с $l > 0$ результаты таковы (узлы в центре звезды не считаются): для p -моды α , ψ' , δP и $\delta\rho$ не имеют узлов, а δr имеет один узел; для g -мод ни одна из этих величин не имеет узлов (т.е. при любом r в диапазоне $0 \leq r \leq R$ все величины сохраняют знак). Можно отметить, что p -мода с $n = 0$ обычно считается ближайшим нерадиальным аналогом основной моды чисто радиальных колебаний произвольной модели звезды.

Для однородной сжимаемой модели, как впервые указал Чандрасекар [77], существует еще одна мода колебаний, частный случай из класса кельвинновских мод. Эта мода характеризуется для данной модели чисто соленидальными смещениями, при которых $\nabla \cdot \delta \mathbf{r} = 0$. Отсюда следует, что $\delta P = 0$ и $\delta\rho = 0$, как и для несжимаемой жидкости, причем первое соотношение справедливо для адиабатических колебаний. Собственные значения для этой моды равны [77, 523]

$$\Omega_l^2 = 2l(l-1)/(2l+1). \quad (17.80)$$

Это выражение справедливо и для однородной несжимаемой сферы, впервые изученной Кельвином [572]. Фактически, указанная мода является единственной возможной модой колебаний такой модели, что и привело к появлению термина «кельвиновская мода». Она соответствует f -моду Каулинга [109] и для моделей общего вида не является солениоидальной, как показано в [453]. По этой причине f -моду для моделей общего вида иногда называют псевдокельвиновской модой.

Можно отметить три обстоятельства: 1) $\Omega_f^2 = 0$ при $l = 0$ или $l = 1$; 2) Ω_f^2 не зависит от Γ_1 (что вытекает из соотношений $\delta P = 0$ и $\delta \rho = 0$); 3) Ω_f^2 не зависит от n , т.е. существует только наименьшая мода, $n = 0$.

Применяя к однородной модели полную систему уравнений четвертого порядка (не преобразуя эти уравнения в систему второго порядка), Смейерс [523] показал, что f -мода является естественным следствием его результатов (см. также [173, 279]). Смейерс показал также, что для солениоидальных кельвиновских мод однородной сжимаемой модели радиальная составляющая δr векторного смещения $\delta \mathbf{r}$ элемента массы равна $\delta r = \text{const} \cdot r^{l-1}$, а тангенциальная составляющая равна $\delta t = \delta r/l$.

В табл. 17.1 приведены некоторые результаты для малых адиабатических колебаний однородной сжимаемой модели с $\Gamma_1 = 5/4$. Они основаны отчасти на данных табл. 15 в [345].

ТАБЛИЦА 17.1

Безразмерные собственные значения Ω^2
 для малых адиабатических колебаний однородной сжимаемой модели
 $(\Gamma_1 = 5/4, \Omega^2 = 3/4 \sigma^2 / \pi G \rho_0 = \sigma^2 R^3 / GM)$

l	n					
	0		1		2	
0 (радиальные)	1,000		12,677		31,000	
1	4,754	(p)	19,44	(p)	41,05	(p)
	—	(f)	—		—	
	-0,4207	(g)	-0,1029	(g)	-0,04872	(g)
2	8,382	(p)	26,23	(p)	51,12	(p)
	0,8000	(f)	—		—	
	-0,7158	(g)	-0,2288	(g)	-0,1174	(g)
3	12,00	(p)	33,03	(p)	61,20	(p)
	1,714	(f)	—		—	
	-1,000	(g)	-0,3633	(g)	-0,1961	(g)
4	15,61	(p)	39,84	(p)	71,28	(p)
	2,667	(f)	—		—	
	-1,281	(g)	-0,5021	(g)	-0,2806	(g)

17.8. Общее описание мод p , g и f

В этом разделе мы дадим общее описание некоторых свойств нерадиальных колебаний звезд; класс крутильных мод (разд. 17.3) мы здесь рассматривать не будем. Наше описание основывается на линейной адиабатической теории, однако обычно предполагают, что такие эффекты, как нелинейность или неадиабатичность (особенно, если они малы), существенно не изменяют описываемых здесь качественных характеристик. Некоторые неадиабатические эффекты кратко рассматриваются в гл. 18. Большинство выводов данного раздела относится лишь к достаточно простым звездным моделям. Имеются в виду модели, которые являются химически однородными, не обладают несколькими лучистыми и конвективными зонами, чередующимися в пространстве, и не имеют слишком высокой концентрации вещества к центру. Более сложные модели показывают качественно иные особенности колебаний и будут рассмотрены в разд. 17.10. Классификация нерадиальных колебаний на моды p , g и f для однородной сжимаемой модели была введена в разд. 17.7 в соответствии с традиционной схемой Каулинга [109]. Наши обозначения p , g и f в настоящем разделе и в остальной части книги будут также соответствовать этой схеме.

На рис. 17.2 показан общий вид спектров линейных адиабатических нерадиальных колебаний обычных звезд. Этот рисунок подобен рисункам, использованным в [524] и других работах. Вдоль горизонтальной оси отложим

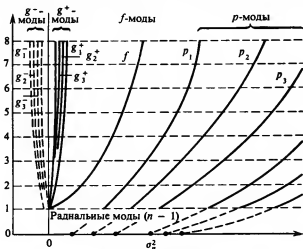


рис. 17.2. Собственные значения $\sigma_n^2 = (2\pi/\text{период})^2$ линейных адиабатических нерадиальных колебаний для различных мод (n) в зависимости от степеней l сферических гармоник (схематично). Показаны четыре типа сфероидальных мод нерадиальных колебаний (p , f , g^+ , g^-) по классификации Каулинга [109]. Продолжение p -мод к горизонтальной оси (штриховые линии) указывает соответствующие собственные значения радиальных мод ($l = 0$) порядка $n - 1$.

квадрат угловой частоты колебаний σ_n^2 , где n — порядок моды ($n = 1, 2, \dots$)*, а вдоль вертикальной оси отложена степень l сферической гармоник. Собственные частоты радиальных колебаний (соответствующие $l = 0$) изображены точками на горизонтальной оси.

Как показано на рис. 17.2, нерадиальные собственные частоты обычно четко разделяются на четыре различных класса: p -моды, обособленная мода f (для $l \geq 2$), моды g^+ и g^- . Моды p обычно характеризуются относительно большими эйлеровыми вариациями давления. Эти вариации в основном и ответственны за возвращающие силы, действующие при колебаниях. Отметим, что σ_n^2 увеличивается с ростом как n , так и l .

Моды g характеризуются относительно малыми эйлеровыми вариациями давления для заданного векторного смещения элемента массы (см. ниже разд. 17.12). Большая часть возвращающей силы обусловлена здесь силой тяжести (относительно малой) (разд. 17.12). Для таких мод при заданном l и при $n \rightarrow \infty$ $|\sigma_n^2| \rightarrow 0$. С другой стороны, часто оказывается, что $|\sigma_n^2|$ для заданного n при достаточно больших l перестает зависеть от l (разд. 17.12); в случае однородной модели это не выполняется (разд. 17.12). Наконец, если $l \approx n$ при $n \rightarrow \infty$, то $|\sigma_n^2|$ перестает зависеть от n (разд. 17.10). Моды g^+ динамически устойчивы ($\sigma_n^2 > 0$), а моды g^- динамически неустойчивы ($\sigma_n^2 < 0$). (Различие знаков у σ_n^2 является единственным различием в определении мод g^+ и g^- .) Критерием того, какой из двух этих классов преобладает, служит величина A , рассмотренная в разд. 17.2. Дальнейшее обсуждение соотношения между модами g^+ и g^- и знаком A будет проведено ниже.

Единственная в своем роде мода f , или кельвиновская мода, существует в звездах только как самая низшая мода ($n = 0$ в однородной модели, $n = 1$ в моделях общего вида) и только при $l \geq 2$. Для достаточно простых моделей и при всех $l \geq 2$ ее собственное значение σ^2 является промежуточным между собственными значениями мод p_1 и g_1 (здесь мы приняли для наинизшей моды $n = 1$).

Отметим (рис. 17.2), что для $l = 0$ моды f и g отсутствуют. Кроме того, если кривые для мод p_n с $l > 0$ продолжить вниз до $l = 0$, то точки пересечения с горизонтальной прямой $l = 0$ дают собственные значения σ^2 для соответствующих радиальных мод (см. подробнее [13]). По этой причине мода p_n обычно рассматривается как нерадиальный аналог радиальной моды порядка $n - 1$. Моды f и g не имеют радиальных аналогов. Из рассмотрения рис. 17.2 может показаться, что моды g^+ имеют $\sigma^2 = 0$ при $l = 1$, однако на самом деле $\sigma^2 > 0$ для этого значения l . Поэтому кривая для моды f (для которой $\sigma^2 = 0$ при $l = 1$), казалось бы, должна пересечь все кривые для мод g^+ при подходе к значению $\sigma^2 = 0$. В действительности же имеет место так называемое «подскакивание» или «непересекаемость» частот [13].

После работы Пекериса [432] считалось, что дипольная мода $l = 1$ не имеет особого физического смысла, поскольку она может соответствовать сме-

*Заметим, что для моделей общего вида наинизшую моду нерадиальных колебаний принято обозначать как моду с $n = 1$, тогда как низшая мода однородной сжимаемой модели обозначалась как мода с $n = 0$, см. разд. 17.7.

шению центра масс системы, что действительно должно иметь место для несжимаемого шара. Однако Смейерс [523] показал, что для сжимаемого шара мода с $l = 1$ имеет более глубокий физический смысл, по крайней мере в случае адиабатических колебаний. При этом центр масс системы остается на месте, а происходит смещение геометрического центра объекта (разд. 17.6а). Для всех других значений l центр масс и геометрический центр совпадают и их смещение равно нулю. Доказательство того, что и в более общем случае неадиабатических колебаний центр масс при $l = 1$ не смещается, было проведено в работе [85].

Рассмотрим теперь собственные функции малых адиабатических иерардических колебаний, в основном следуя работе Смейерса [524]. Многие из приводимых замечаний основаны на опыте, накопленном при анализе большого объема численных результатов. Поэтому справедливость многих из этих замечаний может и не быть очевидной, если исходить только из уравнений, а их степень общности остается до некоторой степени неопределенной. Общие доказательства до сих пор отсутствуют, вероятно, они и не существуют. Почти несомненно, что приводимые замечания справедливы для простых звездных моделей, но для более сложных моделей возможны исключения (см. ниже разд. 17.10). Чтобы дать общее представление, мы собрали в табл. 17.2 некоторые данные относительно иерардических (а для сравнения и радиальных) адиабатических колебаний политропы с показателями $0 \leq \nu \leq 4$, основываясь на работах [279, 454, 497, 498]. Отметим, что в соответствии с (17.33) и (17.23) величина P' пропорциональна δt (тангенциальной составляющей вектора δr),

ТАБЛИЦА 17.2а

Результаты для политропы с показателем
 $\nu = 0$ ($\Gamma_1 = 5/3$, $l = 2$) *)

Мода	$\sigma^2 R^3 / GM$	$Q_d \times 10^2$	Число узлов для		
			δr	P'	ρ'
p_1	8,38	4,00	1	1	1
f	0,800	12,96	0	0	0
g_1	-0,72	—	0	1	1
g_2	-0,22	—	1	2	2
g_3	-0,117	—	2	3	3
F	1	11,59	0	—	0
$1H$	12,67	3,256	1	—	1
$2H$	31,00	2,082	2	—	2

*) Для сравнения в последних трех строках приведены результаты для адиабатических радиальных колебаний ($l = 0$) по данным [279]. F , $1H$ и $2H$ соответственно основная мода, первый и второй обертоны (см. сноску в разд. 8.12в).

ТАБЛИЦА 17.26

Результаты для политропы с показателем
 $\nu = 1$ ($\Gamma_1 = 5/3$, $l = 2$) *)

Мода	$\sigma^2 R^3 / GM$	$Q_d \times 10^2$	Число узлов для		
			δr	P'	ρ'
p_{10}	312	0,656	10	10	10
p_9	260	0,719	9	9	9
p_8	211,6	0,7968	8	8	8
p_7	168,4	0,8931	7	7	7
p_6	129,9	1,017	6	6	6
p_5	96,15	1,182	5	5	5
p_4	67,08	1,415	4	4	4
p_3	42,83	1,771	3	3	3
p_2	23,49	2,391	2	2	2
p_1	9,308	3,799	1	1	1
f	1,498	9,470	0	0	0
g_1	-0,3029	—	0	1	1
g_2	-0,1383	—	1	2	2
g_3	-0,08025	—	2	3	3
g_4	-0,05272	—	3	4	4
g_5	-0,03742	—	4	5	5
g_6	-0,02798	—	5	6	6
g_7	-0,02174	—	6	7	7
g_8	-0,01739	—	7	8	8
g_9	-0,01424	—	8	9	9
g_{10}	-0,01187	—	9	10	10
F	1,892	8,426	0	—	—
$1H$	12,09	3,333	1	—	—
$2H$	27,08	2,227	2	—	—

*) См. примечание к табл. 17.2а.

если пренебречь возмущением ψ' гравитационного потенциала (приближение Каулинга; см. разд. 17.9). В табл. 17.2 приведены значения пульсационной постоянной Q [см., например, (2.4)], выраженные в сутках (что отмечено индексом d). Дополнительные численные результаты содержатся в работах

ТАБЛИЦА 17.2а
 Результаты для политропы с показателем
 $\nu = 1,5$ ($\Gamma_1 = \frac{5}{3}$, $l = 2$) *)

Мода	$\sigma^2 R^3 / GM$	$Q_d \times 10^2$	Число узлов для		
			δr	P'	ρ'
p_3	41,31	1,803	—	—	—
p_2	23,52	2,390	—	—	—
p_1	10,29	3,613	—	—	—
f	2,119	7,962	—	—	—
g_1	0	∞	—	—	—
g_2	0	∞	—	—	—
g_3	0	∞	—	—	—
g_4	0	∞	—	—	—
g_5	0	∞	—	—	—
g_6	0	∞	—	—	—
g_7	0	∞	—	—	—
g_8	0	∞	—	—	—
g_9	0	∞	—	—	—
g_{10}	0	∞	—	—	—
F	2,706	7,046	0	—	—
$1H$	12,54	3,273	1	—	—
$2H$	26,58	2,248	2	—	—

*) См. примечание к табл. 17.2а.

ТАБЛИЦА 17.2г
 Результаты для политропы с показателем
 $\nu = 2$ ($\Gamma_1 = \frac{5}{3}$, $l = 2$) *)

Мода	$\sigma^2 R^3 / GM$	$Q_d \times 10^2$	Число узлов для		
			δr	P'	ρ'
p_{10}	264	0,713	10	10	10
p_9	221	0,780	9	9	9
p_8	182	0,859	8	8	8
p_7	145,7	0,9602	7	7	7
p_6	113,7	1,087	6	6	6
p_5	85,50	1,253	5	5	5
p_4	61,13	1,482	4	4	4
p_3	40,63	1,818	3	3	3
p_2	24,07	2,362	2	2	2
p_1	11,56	3,409	1	1	1
f	3,113	6,569	0	0	0
g_1	0,5633	15,44	1	1	1

*) См. примечание к табл. 17.2а.

Продолжение табл. 17г

Мода	$\sigma^2 R^3/GM$	$Q_d \times 10^2$	Число узлов для		
			δr	P'	ρ'
g_2	0,2968	21,27	2	2	2
g_3	0,1839	27,03	3	3	3
g_4	0,1254	32,73	4	4	4
g_5	0,09112	38,40	5	5	5
g_6	0,06928	44,03	6	6	6
g_7	0,05449	49,65	7	7	7
g_8	0,04401	55,25	8	8	8
g_9	0,03630	60,83	9	9	9
g_{10}	0,03046	66,41	10	10	10
F	4,001	5,794	0	—	—
$1H$	13,34	3,173	1	—	—
$2H$	26,58	2,248	2	—	—

ТАБЛИЦА 17.2а

 Результаты для политропы с показателем
 $\nu = 3$ ($\Gamma_1 = 5/3$, $l = 2$) *)

Мода	$\sigma^2 R^3/GM$	$Q_d \times 10^2$	Число узлов для		
			δr	P'	ρ'
p_{10}	234	0,758	10	10	10
p_9	196	0,828	9	9	9
p_8	163	0,908	8	8	8
p_7	132,4	1,007	7	7	7
p_6	104,8	1,132	6	6	6
p_5	80,55	1,291	5	5	5
p_4	59,42	1,504	4	4	4
p_3	41,47	1,800	3	3	3
p_2	26,72	2,242	2	2	2
p_1	15,26	2,967	1	1	1
f	8,175	4,054	0	0	0
g_1	4,915	5,228	1	1	1
g_2	2,828	6,892	2	2	2
g_3	1,822	8,586	3	3	3
g_4	1,270	10,28	4	4	4
g_5	0,9360	11,98	5	5	5
g_6	0,7188	13,67	6	6	6
g_7	0,5691	15,36	7	7	7
g_8	0,462	17,1	8	8	8
g_9	0,382	18,8	9	9	9
g_{10}	0,322	20,4	10	10	10
F	9,255	3,810	0	—	—
$1H$	16,98	2,813	1	—	—
$2H$	28,48	2,172	2	—	—

*) См. примечание к табл. 17.2а.

ТАБЛИЦА 17.2а
 Результаты для политропы с показателем
 $\nu = 3,25$ ($\Gamma_1 = 5/3$, $l = 2$) *)

Мода	$\sigma^2 R^3 / GM$	$Q_d \times 10^2$	Число узлов для		
			δr	P'	ρ'
p_{10}	227	0,769	10	10	10
p_9	192	0,836	9	9	9
p_8	160	0,916	8	8	8
p_7	130	1,02	7	7	7
p_6	103,6	1,139	6	6	6
p_5	80,18	1,294	5	5	5
p_4	59,66	1,500	4	4	4
p_3	42,22	1,784	3	3	3
p_2	27,88	2,195	2	2	2
p_1	16,96	2,814	1	1	1
f	11,24	3,457	0	2	0
g_1	7,972	4,105	1	1	1
g_2	4,857	5,259	2	2	2
g_3	3,172	6,508	3	3	3
g_4	2,224	7,772	4	4	4
g_5	1,644	9,039	5	5	5
g_6	1,264	10,31	6	6	6
g_7	1,003	11,57	7	7	7
g_8	0,818	12,8	8	8	8
g_9	0,674	14,1	9	9	9
g_{10}	0,569	15,4	10	10	10
F	11,03	3,490	0	—	—
$1H$	18,89	2,667	1	—	—
$2H$	29,87	2,121	2	—	—

*) См. примечание к табл. 17.2а.

[136, 338]; численные результаты для звезд в верхней части главной последовательности можно найти в [9].

Для p -мод $\delta r/r$ имеет узел, который лежит ближе к центру, чем любой узел $\delta t/r$; для g -мод верно обратное. По-видимому, это свойство сохраняется даже для моделей с высокой концентрацией вещества к центру (см. разд. 17.10). Для моды f $\delta r/r$ и $\delta t/r$ не имеют узлов, если исключить политропы с большим показателем ($\geq 3,25$) или более сложные модели. Кроме того, для этой моды δr и ρ' на любом расстоянии от центра имеют одинаковый знак, по крайней мере для простых моделей. Отсюда и из соотношения (5.16) между эйлеровой и лагранжевой вариациями следует, что для моды f величина $\delta\rho$ повсюду относительно мала. В случае однородной модели (сжимаемой или несжимаемой), как мы видели, $\delta\rho = 0$ для этой моды. Для любой нерадиальной моды величины $\delta r/r$ и $\delta t/r$ имеют одинаковое число узлов [524]; однако эта закономерность может не выполняться для более сложных моделей.

ТАБЛИЦА 17.2ж

Результаты для политропы с показателем
 $\nu = 3,5$ ($\Gamma_1 = 5/3$, $l = 2$) *)

Мода	$\sigma^2 R^3 / GM$	$Q_d \times 10^2$	Число узлов для		
			δr	P'	ρ'
p_{10}	223	0,776	10	10	10
p_9	189	0,843	9	9	9
p_8	158	0,922	8	8	8
p_7	128	1,02	7	7	7
p_6	102,9	1,142	6	6	6
p_5	80,10	1,295	5	5	5
p_4	60,29	1,493	4	4	4
p_3	43,41	1,759	3	3	3
p_2	29,76	2,124	2	2	2
p_1	20,93	2,533	1	1	1
f	16,16	2,883	2	2	2
g_1	12,10	3,332	1	3	1
g_2	8,542	3,966	2	2	2
g_3	5,741	4,837	3	3	3
g_4	4,063	5,750	4	4	4
g_5	3,017	6,673	5	5	5
g_6	2,324	7,603	6	6	6
g_7	1,848	8,526	7	7	7
g_8	1,50	9,46	8	8	8
g_9	1,24	10,4	9	9	9
g_{10}	1,05	11,3	10	10	10
F	12,64	3,260	0	—	—
$1H$	21,21	2,516	1	—	—
$2H$	32,08	2,046	2	—	—

*) См. примечание к табл. 17.2а.

Для заданной p -моды (скажем, p_n) δr всегда имеет по крайней мере на один узел больше, чем для соответствующей моды ($n - 1$) чисто радиальных колебаний. Кроме того, для p -мод амплитуда изменений $\delta r/r$, как правило, мала в большей части звезды и относительно велика вблизи поверхности. С другой стороны, для g -мод $\delta r/r$ может оказаться относительно большим глубоко

ТАБЛИЦА 17.2a

Результаты для политропы с показателем
 $\nu = 4$ ($\Gamma_1 = 5/3$, $l = 2$) *)

Мода	$\sigma^2 R^3/GM$	$Q_d \times 10^2$	Число узлов для		
			δr	P'	ρ'
p_{10}	216	0,789	10	10	10
p_9	184	0,854	9	9	9
p_8	154	0,934	8	8	8
p_7	128	1,02	7	7	7
p_6	105,2	1,130	6	6	6
p_5	87,45	1,239	5	5	5
p_4	76,65	1,324	4	6	6
p_3	62,86	1,462	5	5	5
p_2	50,81	1,626	4	4	4
p_1	42,14	1,785	3	5	5
f	34,33	1,978	4	4	4
g_1	27,59	2,206	3	5	5
g_2	23,00	2,417	4	4	4
g_3	17,99	2,732	5	5	5
g_4	15,36	2,957	4	4	4
g_5	12,76	3,245	5	5	5
g_6	10,08	3,650	6	6	6
g_7	8,085	4,076	7	7	7
g_8	6,62	4,50	8	8	8
g_9	5,50	4,94	9	9	9
g_{10}	4,65	5,37	10	10	10
F	15,15	2,978	0	—	—
$1H$	24,94	2,321	1	—	—
$2H$	37,07	1,904	2	—	—

*) См. примечание к табл. 17.2a.

ко в звездных недрах (см. ниже разд. 17.13). (Однако по причинам, указанным в конце разд. 18.3, для g -мод белых карликов $\delta r/r$ в недрах относительно мало.)

Отметим также, что для достаточно простых звездных моделей между различными параметрами пульсаций существуют простые соотношения. Например, для таких моделей число узлов (нулей) радиальной составляющей δr вектора $\delta \mathbf{r}$ равно порядку моды для мод p и g^+ (не считая при этом узла в точке $r = 0$ для $l \neq 1$) и равно нулю для моды f .

Некоторые свойства собственных функций g -мод для массивных звездных моделей ($\sim 30 - 200 M_{\odot}$), состоящих из конвективного ядра и лучистой оболочки, продемонстрированы на рисунках в работе [524], которые мы здесь не воспроизводим. Эти рисунки показывают, что для мод g^+ самому внутреннему узлу δr (а значит, и δP в случае адиабатических колебаний) не соответствует никакой узел δr . В отличие от радиальных колебаний узел δr не обязательно подразумевает существование по соседству узла δr . Это заключение связано с тем, что в случае нерадиальных колебаний в правой части выражения (17.27) для $\text{div} \delta \mathbf{r}$ ($\propto |\delta \rho|$) присутствует дополнительный член: горизонтальные смещения могут также вызывать сжатие или расширение вещества. Из тех же результатов следует, что для мод g^+ знаки δr и $\delta \rho$ противоположны, за исключением, вероятно, областей вблизи поверхности звезды. Это, вообще говоря, означает, если учесть соотношение (5.16) между зйлеровой и лагранжевой вариациями, что в такой звезде для рассматриваемых мод член ρ' оказывается меньше, чем $\delta r(d\rho/dr)$ (мы предполагаем, что $d\rho/dr < 0$), в предельном случае $\rho' = 0$. Аналогично, величина P' для этих мод также должна быть относительно малой. А тогда обычным путем можно показать, что для таких колебаний возвращающаяся сила на единицу массы $|\mathbf{F} - (\nabla P')/\rho + \rho' \nabla P/\rho^2 - \nabla \psi'|$ должна быть относительно малой. Соответственно, и частота колебаний может оказаться довольно малой, что действительно имеет место в случае мод g^+ . С физической точки зрения, можно сказать, что каждый элемент, перемещающийся в заданное положение, имеет почти такие же физические характеристики, как и окружающее вещество (которое по предположению находится в гидростатическом равновесии), и поэтому сам этот элемент близок к гидростатическому равновесию. Следовательно, частоты колебаний могут оказаться очень малыми. С другой стороны, для p -мод (или для обычных звуковых волн) величины ρ' и P' могут быть относительно велики, что приведет к большим возвращающим силам, и поэтому частоты колебаний могут быть очень высокими.

Как показано в работе [86], угловая частота σ для g -мод всегда должна быть меньше, чем самый высокий максимум частоты Брунта — Вайсяля N .

В работах [344] и [502] исследовано пространственное поведение динамически устойчивых и неустойчивых g -мод (соответственно g^+ , $\sigma^2 > 0$ и g^- , $\sigma^2 < 0$) в лучистых ($A < 0$) или конвективных ($A > 0$) областях звездных моделей. Обе работы используют приближение Каулинга (разд. 17.9), в котором пренебрегается возмущением ψ' гравитационного потенциала. В [344] рассматривается только асимптотический предел, когда $|\sigma^2|$ мало, тогда как в [502] на значение величины $|\sigma^2|$ не накладывается никаких ограничений. Из полученных результатов следует, что собственные функции мод g^- могут ос-

циллировать только в конвективно неустойчивых областях ($A > 0$). С другой стороны, собственные функции мод g^+ могут осциллировать только в лучистых областях ($A < 0$), если эти области не расположены во внешних частях звезды. В последнем случае колебательный характер собственных функций не зависит от знака A . В тех областях, в которых собственные функции не осциллируют, они обычно экспоненциально убывают с увеличением расстояния от границ области (областей), где они осциллируют. Эта ситуация схематически представлена на рис. 17.3 для модели звезды, состоящей из конвективного ядра, конвективной оболочки и лучистой промежуточной зоны.

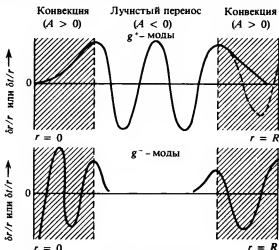


рис. 17.3. Собственные функции (схематично) мод g^+ (вверху) и g^- (внизу) в модели звезды, состоящей из конвективного ядра ($A > 0$), конвективной оболочки ($A > 0$) и лучистой промежуточной зоны ($A < 0$). δr и δt — соответственно радиальная и трансверсальная составляющие лагранжева смещения элемента массы, а r — равновесное радиальное расстояние. Сплошная и штриховая линии в верхней части рисунка показывают два возможных поведения собственных функций мод g^+ во внешней конвективной оболочке.

Наконец, интересна связь g -мод с конвективной неустойчивостью (т.е. со знаком величины A ; см. разд. 17.2). Приводимые ниже замечания основаны на строгом рассмотрении, проведенном Лебовицем [326 — 328] для малых адиабатических нерадиальных колебаний сферических звезд. Рекомендуем также наглядное рассмотрение в работе [344], основанное на пренебрежении возмущениями ψ' гравитационного потенциала (приближение Каулинга, разд. 17.9). (Эти замечания неприменимы к крутильным модам, упомянутым в разд. 17.3 и названным в [327] тривиальными модами.) Если повсюду в звезде $A > 0$ (конвективная устойчивость), то для всех n $\sigma_n^2 > 0$. Другими словами, моды g^- в этом случае не существуют. Если на любом конечном участке в интервале $0 \leq r \leq R$ $A = 0$, то существуют так называемые нейтральные

моды ($\sigma_n^2 = 0$). В частности, если $A = 0$ по всей звезде, то для g -мод $\sigma_n^2 = 0$ при любых n , т.е. такие моды отсутствуют. Как показано в [327], обращение A в нуль в некоторой конечной области действительно является необходимым и достаточным условием того, что для некоторых мод $\sigma_n^2 = 0$. С другой стороны, в [328] показано, что условие $A > 0$ на некотором конечном участке в интервале $0 \leq r \leq R$ служит необходимым и достаточным условием существования динамически неустойчивых мод ($\sigma_n^2 < 0$). В частности, если по всей звезде $A > 0$, то моды g^+ не существуют. Наконец, если в одних частях звезды $A < 0$, а в других $A > 0$, то существуют как g^+ , так и g^- моды. Действительно, из приведенных выводов следует, что одновременное существование мод g^+ и g^- требует, чтобы величина A имела один знак в одной части (частях) звезды, и противоположный — в другой части (частях). Полезно также отметить, что при достаточно малом $|A|$

$$\sigma_n^2 \propto (-A) \quad (17.81)$$

в случае g -мод, где угловые скобки обозначают соответствующее усреднение по звезде (см. [345, § 79]).

Связь g -мод с конвективной неустойчивостью была рассмотрена также в работе [538].

17.9. Приближение Каулинга

В одном из самых первых исследований малых адиабатических нерадиальных колебаний звезд, где впервые были введены термины «моды p , f и g », Каулинг [109] полностью пренебрег возмущениями ψ' гравитационного потенциала. Качественным основанием такого пренебрежения служит то, что в каждой точке ψ' связано с эффектами гравитационного потенциала, более или менее усредненными по всей звезде. Усреднение должно сглаживать локальные флуктуации гравитационного потенциала. Интуитивно подобное предположение кажется вполне возможным, что и было подтверждено в действительности, особенно для мод высокого порядка (большие значения n и/или l) и для моделей с высокой концентрацией вещества к центру, см. [109, 308, 454, 488]. Приближение, в котором пренебрегается величиной ψ' , обычно называют «приближением Каулинга» и считают, что оно не меняет математической сущности задачи (см., например, [345, §79]). Это приближение почти всегда используется в метеорологических, океанографических и т.п. расчетах (см., например, [194, 580, 581]).

То, что для мод высокого порядка величина $|\psi'|$ должна быть малой, следует, например, из уравнения Пуассона. Если заменить d/dr на ik , где k — радиальное волновое число (см. замечания в начале разд. 17.12), то легко получить следующий результат:

$$|\psi'| \propto (k^2 + l(l+1)/r^2)^{-1}. \quad (17.82)$$

Это соотношение показывает, что действительно $|\psi'| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ или $l \rightarrow \infty$, т.е. для мод «высокого порядка».

Если ψ' отбросить, то очевидно, что оставшиеся уравнения образуют сн-

стему второго порядка, которая довольно подробно и в основном с математической точки зрения была проанализирована в работах [86, 338, 339, 345, 407, 502, 503, 507, 626] и других. Мы кратко изложим здесь часть полученных результатов, введя две новые переменные, которые широко использовались в упомянутых исследованиях:

$$v = uP^{1/\Gamma_1} = r^2 \delta r P^{1/\Gamma_1}, \quad (17.83a)$$

$$w = y \rho P^{-1/\Gamma_1} = P' / P^{1/\Gamma_1}. \quad (17.83b)$$

Пренебрегая величиной ψ' и принимая, кроме того, показатель адиабаты Γ_1 постоянным (это предположение будет подразумеваться и в остальной части данного раздела, если не оговорено специально), можно привести основные уравнения к виду

$$dv/dr = [l(l+1)/\sigma^2 - r^2 \rho / \Gamma_1 P] P^{2/\Gamma_1} w / \rho, \quad (17.84a)$$

$$dw/dr = (\sigma^2 + Ag) \rho v / r^2 P^{2/\Gamma_1}. \quad (17.84b)$$

(Обобщение на случай $\Gamma_1 \neq \text{const}$ см. в [407].)

В приближении Каулинга переменная u пропорциональна трансверсальной, или тангенциальной («горизонтальной»), составляющей δt лагранжева смещения элемента массы. Поэтому $w \propto \delta t$, тогда как $v \propto \delta r$.

Исключая из системы (17.84) v или w , можно получить эквивалентные друг другу уравнения второго порядка относительно каждой из этих переменных:

$$d\{(\rho/P^{2/\Gamma_1})[l(l+1)/\sigma^2 - r^2 \rho / \Gamma_1 P]^{-1} dv/dr\}/dr - (\sigma^2 + Ag) \rho v / r^2 P^{2/\Gamma_1} = 0, \quad (17.85a)$$

$$d\{(P^{2/\Gamma_1}/\rho)[r^2/(\sigma^2 + Ag)] dw/dr\}/dr - [l(l+1)/\sigma^2 - r^2 \rho / \Gamma_1 P] w = 0. \quad (17.85b)$$

Эти уравнения можно дополнить следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} v(0) &= 0, & v(R) &= 0, \\ w(0) &= 0, & w(R) &= 0. \end{aligned} \quad (17.86)$$

Можно показать, что граничное условие для $w(R)$ справедливо только в том случае, когда эффективный показатель полнтропы $\nu_e > 1/(\Gamma_1 - 1)$; при этом предполагается, что величина P на поверхности становится очень малой или обращается в нуль. В противном случае, величина $w(R)$ может отличаться от нуля или быть бесконечно большой. Поскольку приведенное условие для показателя полнтропы одновременно является условием конвективной устойчивости (см. [146, Ch. 13]), последнее граничное условие в (17.86) справедливо, только если вещество вблизи самой поверхности звезды находится в лучистом равновесии (что почти всегда имеет место в реальных звездных моделях; см., например, [146, Ch. 20]).

Из уравнений (17.85) становится понятным, как впервые отметил Каулинг [109] (см. также [345, §79]), что, когда величина $|\sigma^2|$ либо очень велика, либо очень мала, эти уравнения принимают форму уравнений Штурма — Лиувилля и к ним полностью применима соответствующая теория (см., например, [282, Ch. 9 — 11]). Например, при очень больших σ^2 уравнение (17.85a) стано-

вится уравнением Штурма — Лиувилля с собственным значением σ^2 . В таком случае должно существовать бесконечное дискретное множество собственных значений, стремящихся к бесконечности для мод очень высокого порядка; Каулинг [109] назвал эти моды p -модами. Кроме того, эта асимптотическая форма уравнения (17.85а) показывает, что всегда $\sigma^2 > 0$ (см. также ниже). Для очень малых σ^2 уравнение (17.85б) становится уравнением Штурма — Лиувилля с собственным значением $1/\sigma^2$. Тогда должен существовать бесконечный дискретный спектр собственных значений, причем для мод высокого порядка σ^2 стремится к нулю; Каулинг назвал эти моды g -модами. Кроме того, как впервые отметили Леду и Смейерс [344], из асимптотического вида уравнения (17.85б) при малых σ^2 вытекает следующее. Если по всей звезде $A < 0$ (лучистый перенос), то $\sigma^2 > 0$; если же повсюду $A > 0$ (конвекция), то $\sigma^2 < 0$; наконец, если в одних частях звезды $A < 0$, а в других $A > 0$, то должны существовать значения σ^2 обоих знаков, т.е. должны существовать как g^+ -, так и g^- -моды.

Интегральные выражения для σ^2 в обоих упомянутых пределах были получены Леду и Вальравиеном [345, §79] на основе уравнений, аналогичных уравнениям (17.85). Мы отсылаем заинтересованного читателя к этой работе.

Некоторые расчеты, представленные в [345, §79] (см. также [454]), указывают на то, что приближение Каулинга почти всегда дает σ^2 с ошибкой, не превышающей 20 %, а зачастую оказывается намного более точным.

17.10. Нерadiaльные моды для сложных звездных моделей

Под «сложными» звездными моделями мы понимаем в довольно широком смысле модели с высокой концентрацией вещества к центру, с чередующимися лучистыми и конвективными областями, а также химически неоднородные модели, такие, как модели проэволюционировавших звезд. Классическими примерами подобных моделей служат политропы с относительно высокой концентрацией массы к центру, т.е. с эффективным показателем политропы $\nu_e \gtrsim 3,25$ (см., например, [146, Ch. 12]). Свойства нерadiaльных колебаний таких моделей были впервые рассмотрены в [454] и приведены нами в табл. 17.2а — 17.2з. Например, в случае политроп с $\nu_e \leq 3,25 \delta r$ для моды f при $l = 2$ не имеет ни одного узла. Однако если ν_e становится больше указанного значения, то в этой моде появляются два дополнительных узла, при дальнейшем увеличении ν_e — еще два узла, и т.д. (согласно [503], для $l = 2$ первое добавление узлов происходит при $\nu_e = 3,42$, что соответствует отношению центральной и средней плотностей $\rho_c/\bar{\rho} = 127,5$). Близкие моды ведут себя качественно одинаково: когда концентрация массы к центру увеличивается, появляются дополнительные узлы в δr , по два новых узла одновременно. В то же самое время моды промежуточной частоты приобретают свойства гравитационных мод в центральных областях звезды и акустических мод в ее внешних слоях. Причины этих особенностей будут рассмотрены ниже в данном разделе и в разд. 17.11. Другие примеры сложных моделей представлены в работах [407, 408] (звезды в стадии эволюции сразу после ухода с главной

последовательности), [8] (несколько более проэволюционировавшие звезды), [242] (составные политропы), [187, 188, 190, 409] (сильно проэволюционировавшие звезды с высокой концентрацией вещества к центру, находящиеся в стадии горения гелия в ядре), [395] (маломассивные звезды, ушедшие с главной последовательности и имеющие внешнюю конвективную зону). Как хорошо известно, для этих более сложных моделей перестают выполняться простые соотношения, отмеченные выше и в разд. 17.8, касающиеся порядка мод и числа узлов в δr , а также ряда других закономерностей. С математической точки зрения, такое нарушение соотношений не должно удивлять, поскольку даже в приближении Каулинга уравнения нерадиальных адиабатических звездных пульсаций в общем случае не образуют системы уравнений Штурма — Лнувилля.

Запишем уравнения (17.84) (справедливые только в приближении Каулинга и для $\Gamma_1 = \text{const}$) в следующем виде:

$$dv/dr = \alpha(r)w, \quad (17.87a)$$

$$dw/dr = \beta(r)v, \quad (17.87b)$$

где величины $v(\propto \delta r)$ и $w(\propto \delta r)$ определены соотношениями (17.83) и где

$$\alpha(r) = (S_l^2/\sigma^2 - 1)(\rho/\Gamma_1 P)r^2 P^{2\Gamma_1/\rho}, \quad (17.88a)$$

$$\beta(r) = (\sigma^2/N^2 - 1)(-Ag)\rho/r^2 P^{2\Gamma_1}. \quad (17.88b)$$

Здесь S_l — критическая акустическая частота, определяемая соотношением

$$S_l^2 = l(l+1)\Gamma_1 P/r^2 \rho, \quad (17.89)$$

$N = (-Ag)^{1/2}$ — частота Брунта — Ваясыля (разд. 17.2). Физически, величина $2\pi S_l^{-1}$ — это время, необходимое звуковой волне для прохождения вдоль окружности большого круга радиусом r расстояния, равного горизонтальной длине волны возмущения, $2\pi r/[l(l+1)]^{1/2}$ (см. разд. 17.12); S_l иногда называют частотой Лэмба.

Исходя из уравнений (17.87), можно выделить два качественно различных типа поведения решений v и w . Рассмотрим сначала только такой интервал $r_1 < r < r_2$, в пределах которого обе функции $\alpha(r)$ и $\beta(r)$ сохраняют знаки. Кроме того, мы неявно предполагаем, что величина σ^2 каким-то образом известна (хотя бы приближенно), и поэтому на любом расстоянии от центра можно вычислить функции $\alpha(r)$ и $\beta(r)$ (по крайней мере можно определить их знаки). Согласно одной из теорем сравнения Штурма (см., например, [282; §10.32]), v и w как функции радиуса могут осциллировать в интервале (r_1, r_2) только в том случае, если α и β имеют противоположные знаки. Это было отмечено Унно [591], а затем тщательно исследовано в работах [407, 503]; см. также [86, 507, 626].

Как видно из уравнений (17.88), противоположные знаки у функций α и β в интервале (r_1, r_2) могут иметь место в двух случаях:

1) σ^2 очень велико; точнее, $\sigma^2 > S_l^2 N^2$. Тогда $\alpha < 0$, $\beta > 0$. [Здесь мы предполагаем, что $A < 0$ (лучистый перенос) и что $\sigma^2 \geq 0$. Эти предположения будут всегда подразумеваться, если не оговорено особо. О случаях, когда

эти предположения не выполняются, см. ниже и в конце разд. 17.8.] По причинам, которые будут указаны несколько ниже и в разд. 17.11, а также для соответствия терминологии, принятой в [407, 503], мы будем называть этот случай больших σ^2 акустическим случаем.

2) σ^2 очень мало; точнее, $\sigma^2 < S_p^2 N^2$. Тогда $\alpha > 0$, а $\beta < 0$, по крайней мере если $A < 0$ (лучистый перенос). В областях, где $A > 0$ (конвекция), величина β всегда положительна для $\sigma^2 > 0$, поскольку в этом случае $N^2 < 0$.

Если $\sigma^2 > S_p^2$, то в таких областях мы имеем $\alpha < 0$ и $\beta > 0$. Как указано в [502], такие конвективные области должны охватывать самые внешние слои звезды. Эта возможность скорее относится к случаю (1). Для достаточно же малых σ^2 (в частности, $\sigma^2 < S_f^2$) α и β положительны в конвективной области, и поведение решений v и w должно быть таким, как описывается ниже для случая (3). Случай малых σ^2 мы будем называть гравитационным случаем.

Наконец, рассмотрим еще одну возможность:

3) σ^2 имеет промежуточное значение; точнее, σ^2 лежит между S_f^2 и N^2 . Тогда величины α и β будут одного знака: обе положительны, если $N^2 < \sigma^2 < S_p^2$, и обе отрицательны; если $S_f^2 < \sigma^2 < N^2$. Этот случай мы будем называть смешанным случаем. Отметим, что термины «акустический» и «гравитационный» связаны с определенными свойствами p - и g -мод (разд. 17.8).

В случаях (1) и (2) функции v и w могут быть осциллирующими (в пространстве), и тогда поведение решений во времени производит впечатление распространяющихся (бегущих) волн. В случаях (3) функции v и w не осциллируют и принято говорить, что поведение решений во времени соответствует исчезающим волнам [407].

Чтобы иметь примерное представление о типах решений уравнений (17.87), которые можно получить в трех упомянутых случаях, временно пренебрежем зависимостью α и β от r и будем считать их постоянными*. Тогда из уравнений (17.87а,б) легко получить два дифференциальных уравнения второго порядка, каждое из которых содержит только одну зависимую переменную. Например, будем иметь

$$d^2 v / dr^2 = \alpha \beta v \quad (17.90)$$

и точно такое же уравнение для w . Если предположить, что v и w пропорциональны $\exp(ikr)$, где k — локальное радиальное волновое число, то получим

$$k^2 = -\alpha\beta = -(S_f^2 \sigma^2 - 1)(\rho/\Gamma_1 P)(\sigma^2/N^2 - 1)(-Ag). \quad (17.91)$$

Видно, что в случае (1) (когда σ^2 больше S_f^2 и N^2) $k^2 > 0$, т.е. функции $v(\alpha\delta r)$ и $w(\alpha\delta r)$ осциллируют в пространстве, а поэтому поведение решений во времени соответствует распространяющимся акустическим волнам. Действительно, как следует из уравнения (17.91), при $\sigma^2 \rightarrow \infty$ $k^2 \rightarrow \sigma^2(\rho/\Gamma_1 P)$;

*Более общий случай, когда α и β не постоянны, легко рассмотреть с помощью обычной замены переменных. Таким способом общее линейное дифференциальное уравнение второго порядка, как, например, уравнение (17.85а), всегда можно представить в «нормальном» виде $d^2 f / dr^2 + \gamma(r)f = 0$, где $\gamma(r)$ — некоторая функция от r ; см., например, [222, § 59].

это — дисперсионное соотношение для обычных звуковых волн. В случае (2) (когда σ^2 меньше S_I^2 и N^2) снова имеем $k^2 > 0$, т.е. снова получаем осциллирующие решения, которые соответствуют распространяющимся гравитационным волнам. При $\sigma^2 \rightarrow 0$ волновое число k должно стать очень большим, и поэтому данный случай соответствует возмущениям с очень короткими длинами волн в радиальном направлении. Однако в горизонтальном направлении длины волн значительно больше [см. ниже уравнение (17.96)]. Наконец, в случае (3) (когда σ^2 имеет промежуточное значение между S_I^2 и N^2), $k^2 < 0$, т.е. функции v и w не осциллируют и соответствуют нераспространяющимся (исчезающим) волнам. В таких областях звезды амплитуда волны может экспоненциально убывать.

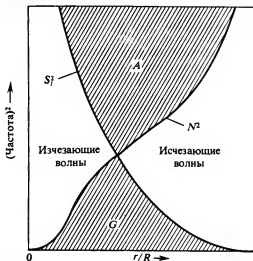


рис. 17.4. Схематичное поведение квадрата критической акустической частоты S_I^2 [уравнение (17.89)] и квадрата частоты Брунта — Вайсяля N^2 [уравнение (17.13)] вдоль относительного радиуса r/R в «простой» звездной модели. Символы A и G указывают соответственно акустическую и гравитационную области, в которых решения уравнений (17.87) являются осциллирующими в пространстве и соответствуют распространяющимся волнам.

Как же изменяются частоты S_I и N в сферической звезде вдоль радиуса? Ясно, что при $r \rightarrow 0$ $S_I \rightarrow \infty$, а вблизи поверхности ($r = R$) $S_I^2 \propto P/\rho$. Обычно отношение P/ρ вблизи поверхности становится малым или обращается в нуль. Расчеты показывают, что величина S_I^2 , как правило, более или менее монотонно убывает от бесконечности в центре до очень малого значения на поверхности. С другой стороны, A можно записать в виде произведения медленно изменяющейся функции от r (которая постоянна в случае политропа) и обратной величины локальной высоты однородной атмосферы, т.е. величины $\rho g/P$ для звезды в гидростатическом равновесии, где g — локальное ускорение силы тяжести. Поскольку при $r \rightarrow 0$ $g \propto r$, мы имеем $|A| \propto r$, т.е. $N^2 = -A g \propto r^2$ при $r \rightarrow 0$. Вблизи поверхности $N^2 \propto \rho/P$, т.е. N^2 становится

ся большим или даже стремится к бесконечности. Таким образом, N^2 изменяется от нуля в центре до большого или бесконечно большого значения на поверхности. Расчеты показывают, что для простых звездных моделей увеличение N^2 от центра к поверхности происходит более или менее монотонно и кривые для S_f^2 и N^2 пересекаются в некоторой промежуточной точке. Для более реалистичных моделей кривая N^2 может быть немонотонной и негладкой, поскольку величина A представляет собой разность двух производных.

Кривые S_f^2 и N^2 как функции r схематически показаны на рис. 17.4 для простой звездной модели. В этом случае акустическая (A) и гравитационная (G) области четко разделяются по частоте. Для таких моделей мода f может быть представлена на рис. 17.4 горизонтальной линией, проходящей вблизи точки пересечения кривых S_f^2 и N^2 . Все p - или g -моды также могут быть представлены на этом рисунке горизонтальными линиями. Для p -мод горизонтальные линии лежат выше точки пересечения, а для g -мод — ниже. К таким простым моделям применимы соотношения между порядком моды и числом узлов, а также большинство общих замечаний, высказанных в разд. 17.8. График, подобный рис. 17.4, Осаки [407] назвал «диаграммой распространения»; он широко используется геофизиками при изучении распространения волн в океанах и земной атмосфере (см., например, [194, 580, 581]).

В работе [503] приведены кривые S_f^2 и N^2 для политропы индекса 3 при $l = 2$ и $\Gamma_1 = 5/8$, которые напоминают рис. 17.4. Эта модель, по-видимому, достаточно проста, и поэтому для нее справедливы вышеупомянутые замечания.

Однако для более сложных моделей, примером которых может служить политропа с показателем 4, мы имеем ситуацию, изображенную на рис. 17.5 для $l = 2$ и $\Gamma_1 = 5/8$ [503]. В этом случае области A и G уже не разделяются четко по вертикали: существует довольно большой интервал промежуточных частот, охватывающий моду f и несколько примыкающих к ней низших p - и g -мод, для которых внутренние части звезды попадают преимущественно в область G , а внешние — в область A . Эти моды с промежуточными частотами имеют смешанный характер: они подобны гравитационным волнам во внутренних частях звезды и акустическим волнам — во внешних частях. Отметим, что функция dr может иметь узлы сразу в обеих областях A и G (рис. 17.5). Как указано в [503], рассмотрение областей A и G позволяет объяснить появление дополнительных узлов и смешанный характер этих мод промежуточной частоты, особенности которых отмечались в начале данного раздела применительно к политропам с высокой концентрацией вещества к центру. Объяснение этих свойств, представленное в [454], по существу такое же, хотя и выражено в других понятиях. Примеры диаграмм распространения можно найти в работах [18, 19, 409, 508, 509, 593].

Основной причиной того, почему для моделей с более высокой концентрацией вещества к центру N^2 имеет два четко выраженных экстремума, является, вероятно, большое влияние локального ускорения силы тяжести g . Для подобных моделей ускорение g имеет сильный максимум приблизительно на таком уровне, глубже которого заключена большая часть массы звезды. Сила тяготения там настолько велика, что частота Брунта — Вайсяля оказыва-

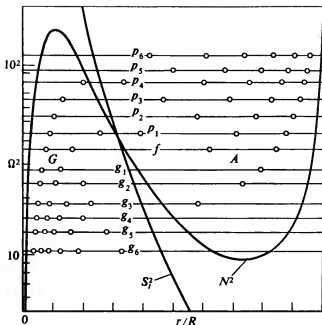


рис. 17.5. Квадрат безразмерной угловой частоты Ω^2 для политропы показателя 4 в зависимости от относительного радиального расстояния r/R [503]. Сплошные кривые — квадраты частот S_l^2 для $l = 2$ [уравнение (17.89)] и N^2 для $\Gamma_1 = 5/3$ [уравнение (17.13)]. В представленном случае нет четкого разделения областей A («акустическая») и G («гравитационная») по вертикали: существует довольно большой интервал «промежуточных» частот, для которых внешние части звезды лежат преимущественно в области A , а внутренние — в области G . Горизонтальные прямые — квадраты собственных частот для отмеченных мод; кружки показывают положение узлов функции δr .

ется относительно высокой. Снаружи от этого уровня ускорение g изменяется приблизительно как r^{-2} , а вблизи центра звезды $g \propto r$. Такое поведение g , а также отмеченные ранее в данном разделе свойства величины A , по-видимому, и объясняют основные качественные особенности кривой N^2 , представленные на рис. 17.5.

Отметим, что для частот выше и ниже двух экстремумов N^2 осцилляции собственных функций полностью сосредоточены в областях A или G соответственно. Кроме того, как указал Леду [338], чем больше степень l , тем ближе к поверхности располагается внутренняя граница области A , поскольку S_l пропорционально $l(l+1)$ [см. уравнение (17.89)]. Осаки [407] отметил, что эволюция умеренно массовых звезд главной последовательности ($\sim 10M_\odot$), в которых по мере расходования водорода масса конвективного ядра уменьшается, может приводить к возникновению непосредственно над конвективным ядром относительно тонкой области с непрерывным про-

пространственным изменением химического состава. В этой области средняя молекулярная масса μ возрастает с глубиной, а значит, растет n ($-A$) [см. уравнение (17.15)] (вещество становится еще более устойчивым относительно конвекции), следовательно частота Брунта — Вайсяля $N = (-Ag)^{1/2}$ оказывается относительно большой. Эта ситуация изображена в [407, 408] на нескольких диаграммах распространения, соответствующих различным эволюционным стадиям (см. также рис. 17.6). Диаграммы показывают сильно выступающее трапециевидное продолжение области G в зону с непрерывным пространственным изменением химического состава, и в ходе эволюции этот пик становится все выше и шире (пример представлен на рис. 17.6). Как было указано выше, большое значение N приводит к тому, что в этой области собственные функции становятся осциллирующими, как впервые отметил Осаки [407] ($\sigma^2 < S_p^2 N^2$). Такое поведение собственных функций в областях с непрерывным изменением химического состава Осаки назвал «захватом» гравитационных мод. Он также уподобил эти обособленные области потенциальным ямам, часто рассматриваемым в квантовой механике.

Осаки [407] обнаружил еще одно сравнительно новое явление (по крайней мере, в отношении пульсирующих звезд). Оно проявляется в виде резких ступенчатых изменений безразмерных частот нерадиальных мод в процессе эво-

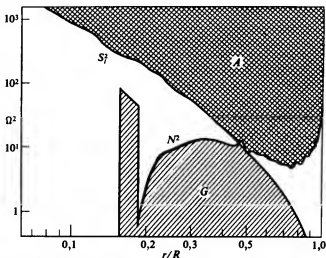


рис. 17.6. Квадрат критической акустической частоты S_p^2 [уравнение (17.89)] для $l = 2$ и частоты Брунта — Вайсяля N^2 [уравнение (17.13)] в зависимости от относительного радиуса r/R для модели звезды $10M_{\odot}$, в конвективном ядре которой доля водорода по массе уменьшилась до 0,48 [407]. Обе частоты безразмерные, выражены в единицах GM/R^3 . Обратите внимание на дополнительный трапециевидный пик в области G , имеющий место в зоне, окружающей конвективное ядро. В этой зоне химический состав непрерывно изменяется в пространстве, причем средняя молекулярная масса μ возрастает с глубиной. Возрастание μ с глубиной приводит к росту величины $(-A)$ в указанной области [см. уравнение (17.15)].

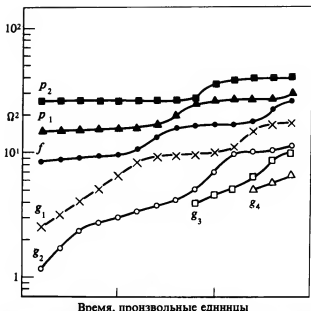


рис. 17.7. Безразмерные частоты нерадиальных мод $s/l = 2$ в зависимости от времени (в произвольных единицах) для эволюционирующей модели звезды массой $10M_{\odot}$ (из работы [407]).

люции звезды (рис. 17.7). Согласно Осаки, эти резкие изменения связаны с появлением в ходе эволюции новых узлов в зоне непрерывно изменяющегося химического состава. Качественно аналогичное явление рассматривалось в посвященной однородно вращающимся изотермичным газовым цилиндрам работе [254], авторы которой назвали этот эффект «подскакиванием» мод.

Эффект «подскакивания» рассмотрен в важной работе [13] на основе взаимодействия «g-подобных» и «p-подобных» мод (см. также [86, 507]).

17.11. Фазовые диаграммы

«Фазовыми диаграммами» Осаки [407] и Скуфлер [503] назвали кривые на плоскости $v - w$ (или $\delta r - \delta t$), вдоль которых текущий радиус r играет роль параметра. Как впервые отметили Осаки и Скуфлер, такие фазовые диаграммы с большой наглядностью демонстрируют некоторые качественные характеристики адиабатических нерадиальных колебаний, исследованных в предыдущем разделе.

Качественную картину изменения v и w на такой фазовой диаграмме можно получить, считая $\alpha(r)$ и $\beta(r)$ постоянными. Следуя Осаки [407], умножим

уравнение (17.87а) на βv , а уравнение [17.87б] на αw , и затем вычтем одно уравнение из другого. Тогда после интегрирования получим

$$\beta v^2 - \alpha w^2 = \text{const.} \quad (17.92)$$

Если α и β — одного знака, что имеет место в области исчезающих волн (разд. 17.10), то соотношение (17.92) является уравнением гиперболы. Если α и β — противоположного знака, что имеет место в акустической (А) или гравитационной (G) областях (разд. 17.10), то (17.92) есть уравнение эллипса. В более общем случае, когда $\alpha(r)$ и $\beta(r)$ — переменные, фазовые кривые оказываются более сложными, чем гиперболы или эллипсы, но их основные качественные особенности при соответствующих знаках α и β не отличаются от описанных выше.

С изменением r изображающая точка на фазовой диаграмме перемещается в соответствии с уравнениями (17.87). Для акустических волн, т.е. в области А, где $\alpha < 0$ и $\beta > 0$, эта точка с возрастанием r описывает кривую против часовой стрелки, а для гравитационных волн, т.е. в области G, где $\alpha > 0$ и $\beta < 0$ — по часовой стрелке. Граничное условие (17.62) требует, чтобы v и w имели одинаковый знак в центре звезды ($r = 0$). Пользуясь произвольностью нормировки, знак обычно выбирают положительным. Тогда точка, представляющая на фазовой диаграмме центр звезды, располагается в первом квадранте.

Напомним, что в настоящем разделе мы используем (только для простоты изложения) приближение Каулинга (разд. 17.9), которое, по-видимому, не изменяет математической природы задачи (см. [345, §79]).

На поверхности звезды ($r = R$) граничное условие в приближении Каулинга можно взять в виде $\delta t = \delta r / \Omega^2$ [см. соотношение (17.72)]. Таким образом, до тех пор пока $\Omega^2 > 0$ (а это будет предполагаться почти во всех интересующих нас случаях), v и w должны быть одного знака и на поверхности звезды. Поэтому на фазовой диаграмме точка, соответствующая поверхности, должна лежать в первом или третьем квадрантах.

Итак, при увеличении r от 0 до R изображающая точка на фазовой диаграмме должна начать свое движение в первом квадранте, затем двигаться по спирали по часовой стрелке или против часовой стрелки в зависимости от того, является ли рассматриваемая область соответственно областью G или А, и, наконец, закончить движение либо в первом, либо в третьем квадранте. Как отмечено в [407, 503], для простых звездных моделей число, показывающее, сколько раз изображающая точка пересекает ось w (т.е. сколько раз δr обращается в нуль), равно порядку моды.

В этой схеме моде f приписывается номер 0, моде p_n — номер $+n$, а моде g_n — номер $-n$. Причем $+n$ соответствует числу пересечений оси w (или δt) при движении против часовой стрелки, а $-n$ — по часовой стрелке, если движение происходит в направлении увеличения r . Отметим, что в согласии с замечаниями, сделанными в разд. 17.8, эта схема требует, чтобы для p -мод самый внутренний узел функции δr лежал ближе к центру, чем соответствующий узел функции δt , а для g -мод имеет место обратное.

Эти выводы проиллюстрированы на фазовых диаграммах, представленных

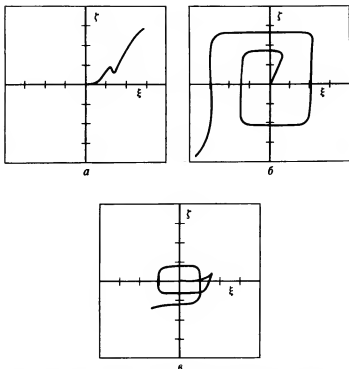


рис. 17.8. Фазовые диаграммы для мод f (а), p_3 (б) и g_3 (в) при $l = 2$ и $\Gamma_1 = 3/2$ для полнотропы показателя 3 [503]. Величины ξ и ζ определяются уравнениями (17.93) и эквивалентны величинам v и w соответственно. Каждое деление оси соответствует изменению ξ или ζ на единицу. Точка $\xi = 0, \zeta = 0$ соответствует центру звезды ($r = 0$), а движение вдоль кривой из начала координат соответствует росту r . Дополнительные объяснения см. в тексте.

ных на рис. 17.8 и соответствующих квадрупольным ($l = 2$) модам f, p_3 и g_3 для полнотропы показателя 3 и при $\Gamma_1 = 3/2$. Переменные ξ и ζ , представленные на рисунках, определяются соотношениями

$$\xi = \pm \lg(1 + |\delta r/R|), \quad (17.93a)$$

$$\zeta = \pm \lg(1 + |RP'/(GM\rho)|), \quad (17.93б)$$

где знаки перед логарифмами выбираются так, чтобы они совпадали со знаками δr и P' соответственно, а все символы имеют обычный смысл. Отметим, что величина ξ аналогична v или δr , а ζ — w или δt .

Однако для более сложных моделей траектория изображающей точки на фазовой диаграмме оказывается более извилистой, и это, вероятно, неудивительно. Примером могут служить фазовые диаграммы, представленные на

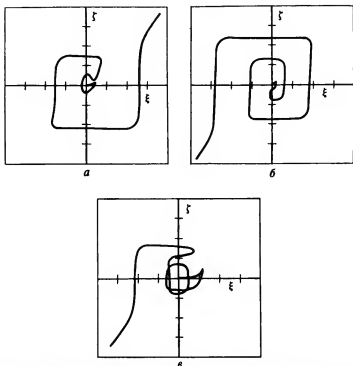


рис. 17.9. То же, что на рис. 17.8, но для политропы показателя 4 ($l = 2$, $\Gamma_1 = 3/2$) [503]. *a* — f -мода, *b* — p_3 -мода, *v* — g_3 -мода.

рис. 17.9 для колебаний политропы с показателем 4 при $\Gamma_1 = 3/2$ и $l = 2$ (из работы [503]). Отметим, что в согласии с предыдущими замечаниями изображающая точка движется в областях G вдоль спирали по часовой стрелке, а в областях A — против часовой стрелки. Осаки [407] и Скуфлер [503] высказали мысль, что традиционную схему классификации мод, только что описанную для простых звездных моделей, можно сохранить и для более сложных моделей, по крайней мере при $l = 2$, если для каждой моды вычесть число пересечений оси w (или ζ или δt) при движении по часовой стрелке из числа пересечений этой оси при движении против часовой стрелки, причем движение происходит в направлении увеличения r . Например, для моды p_3 в случае политропы с показателем 4 число пересечений оси ζ при движении (с возрастанием r) против часовой стрелки равно 4, а число пересечений по часовой стрелке равно 1, т.е. имеем $4 - 1 = 3$.

Сибакхаси и Осаки [508] ввели альтернативную схему классификации мод, в которой был учтен двойственный характер «захвата» нерадиальных колебаний (разд. 18.3). Вольф [626] предложил еще одну схему классификации, несколько похожую на предыдущую, но основанную в значительной степени на свойствах p - и g -мод высокого порядка.

Осакн [407] представил фазовые диаграммы, соответствующие модам g_2 , g_1, f, p_1, p_2 при $l = 2$ для модели звезды с массой $10 M_\odot$ на начальной главной последовательности, а также диаграммы, соответствующие модам g_1, f, p_1 на более поздней стадии эволюции той же модели, но эти диаграммы мы здесь воспроизводить не будем. Другие примеры фазовых диаграмм можно найти в книге Унно и др. [593].

17.12. Нерадиальные колебания для мод очень высокого порядка

В настоящем разделе мы представим некоторые приближенные результаты для мод очень высокого порядка, т.е. таких, для которых $l \gg 1$ и (или) очень велико радиальное волновое число $k = 2\pi/(\text{«длина волны» вдоль радиуса})$, например по сравнению с r^{-1} или $\lambda_p^{-1}(\lambda_p - \text{локальная высота однородной атмосферы, равная } P/(\rho g) \text{ для звезды в гидростатическом равновесии})$. В этом случае, а также потому, что рассмотренные лишь приближенные, можно считать критическую акустическую частоту S_l [уравнение (17.89)], частоту Брунта — Вайсяля N [уравнение (17.13)] и адиабатическую скорость звука постоянными и каждый раз приписывать им значения, соответствующие определенной области в звезде. Эти различные области будут рассмотрены ниже в настоящем разделе, а также в разд. 17.13 и 18.2. Кроме того, в пределе коротких длин волн мы воспользуемся приближением Каулинига (разд. 17.9) и предположим, по крайней мере в начале рассмотрения, что изменение каждой из зависимых переменных (скажем, v или w ; см. разд. 17.9) вдоль радиуса пропорционально $\exp[ikr]$. Основанием для последнего предположения служат то, что в пределе очень коротких волн все коэффициенты дифференциальных уравнений остаются почти постоянными на расстояниях порядка длины волны, а частные решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами имеют экспоненциальный вид. Тогда из дифференциальных уравнений следует соотношение (17.91), где все величины считаются постоянными. Нерадиальные колебания высокого порядка были рассмотрены также в работах [21, 86, 507]*.

Предположим теперь, что угловая частота колебаний σ определяется в основном физическими условиями в какой-то одной области звезды, и возьмем значения S_l , N и $\Gamma_1 P/\rho$ в (17.91) соответствующими именно этой области. В этом случае при заданных k соотношение (17.91) можно рассматривать как квадратное уравнение относительно σ^2 ; его решение имеет вид

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}[S_l^2 + N^2 + k^2 \Gamma_1 P/\rho] \times \\ \times \left\{ 1 \pm \left[1 - \frac{4S_l^2 N^2}{(S_l^2 + N^2 + k^2 \Gamma_1 P/\rho)^2} \right]^{1/2} \right\}, \quad (17.94)$$

где мы предположили, что знаменатель не равен нулю.

*Тщательное рассмотрение нерадиальных колебаний высокого порядка выполнила также М. Тассуль, *Astrophys. J. Suppl.*, 43, 469, 1980.

Решение со знаком плюс в (17.94) дает значения σ^2 для p -мод, а со знаком минус — для g -мод, по крайней мере в рассматриваемом случае мод высокого порядка. Предположим, что величина $|N^2|$ мала в сравнении с любым из двух других слагаемых в знаменателе в (17.94). Можно показать, что такого предположения достаточно, чтобы гарантировать малое значение второго члена под знаком квадратного корня. Пренебрегая этим членом, получаем для p -мод высокого порядка

$$\sigma_p^2 \approx [l(l+1)/r^2 + k^2]\Gamma_1 P/\rho. \quad (17.95)$$

Величину $l(l+1)/r^2$ иногда называют квадратом «горизонтального» волнового числа возмущения.

Приведенное выражение показывает, что σ_p возрастает с увеличением как l , так и k . Кроме того, из (17.95) вытекает физически приемлемый результат, что если $l(l+1)/r^2$ значительно меньше k^2 , т.е. если для p -мод «вертикальная длина волны» мала в сравнении с «горизонтальной», то значение σ_p почти не зависит от l , по крайней мере в рассматриваемом пределе, в частности, при $l = 0$ (чисто радиальные колебания) мы имеем $\sigma_p^2 \approx k^2 \Gamma_1 P/\rho$, т.е. соотношение для обычных звуковых волн (см. разд. 5.5 и 17.10).

Для g -мод высокого порядка можно разложить квадратный корень в ряд с точностью до первого порядка относительно упомянутого малого члена. В этом приближении получим

$$\sigma_g^2 \approx \frac{l(l+1)/r^2}{l(l+1)/r^2 + k^2} N^2. \quad (17.96)$$

Мы замечаем, во-первых, что в рассматриваемой области звезды σ_g^2 имеет тот же знак, что и $(-A)$, причем мы предполагаем, что только одна эта область звезды определяет значение σ_g . Поэтому $\sigma_g^2 > 0$ (динамическая устойчивость) соответствует $A < 0$ (устойчивость относительно конвекции). И напротив, $\sigma_g^2 < 0$ (динамическая неустойчивость) соответствует $A > 0$ (конвективная неустойчивость). Как мы увидим ниже в данном разделе, в последнем случае величина, обратная $|\sigma_g^2|$, пропорциональна квадрату характерного времени жизни конвективного элемента.

Во-вторых, если l фиксировано, а $k \rightarrow \infty$, то $\sigma_g^2 \propto 1/k^2 \rightarrow 0$, что согласуется с асимптотическим поведением g -мод высокого порядка, описанным в разд. 17.8. Аналогично, $\sigma_g^2 = 0$ при $l = 0$ и произвольном (но не равном нулю) значении k . Данный результат — проявление того факта, что g -моды не могут существовать при чисто радиальном движении. Если k фиксировано, а $l \rightarrow \infty$, то из соотношения (17.96) следует, что $\sigma_g^2 \approx N^2$. Другими словами, в этом пределе фиксированной «вертикальной длины волны» и произвольно малой «горизонтальной длины волны» частота σ_g перестает зависеть от l и приблизительно равна частоте Брунта — Вайсяля*. Однако прежде чем это осуществится, величина l , возможно, должна стать очень большой в зависимости от k (см. в конце разд. 18.3). Физически приведенный результат попро-

*См. следующую сноску.

сту отражает тот факт, что N связано только с вертикальными колебаниями элемента массы в стратифицированной жидкости. Указанный предел $l \rightarrow \infty$ соответствует наличию большого числа близко расположенных струй опускающегося и поднимающегося вещества. Однако сделанный вывод о независимости σ_g от l при больших l и фиксированном k неприменим к однородной (с постоянной плотностью) сжимаемой модели. Полученное в разд. 17.7 аналитическое решение показывает, что в этом пределе $|\sigma_g| \propto l^{1/2}$. Далее, из (17.96) следует, что $\sigma_g^2 \sim N^2$, если $k^2 \sim l(l+1)/r^2$, т.е. если вертикальное и горизонтальное волновые числа, соответственно k и $[l(l+1)]^{1/2}/r$, сравнимы между собой. В этом случае мы, как и в разд. 17.2, имеем дело с периодической структурой жидкости, элементы которой имеют примерно одинаковые размеры во всех направлениях.

Наконец, в-третьих, интересно рассмотреть для мод высокого порядка (большие k) соотношение между фазовой скоростью $v_{ph} = -\sigma/k$ и групповой скоростью $v_{gr} = -d\sigma/dk$ (см., например, [51, 288]). (Знак минус обусловлен здесь принятой зависимостью от времени: $\exp[+i\sigma t]$.) Ясно, что если v_{ph} не зависит от вертикальной длины волн $2\pi/k$, то $v_{gr} = v_{ph}$.

В случае p -мод высокого порядка получаем

$$|v_{ph}| = [l(l+1)/r^2 k^2 + 1]^{1/2} (\Gamma_1 P/\rho)^{1/2}, \quad (17.97)$$

откуда следует, что если l фиксировано, а $k \rightarrow \infty$, то v_{ph} перестает зависеть от k . Таким образом, в данном случае $v_{gr} \rightarrow v_{ph}$.

В случае g -мод высокого порядка получаем

$$|v_{ph}| = [l(l+1)/r^2]^{1/2} (N/k^2) [1 + l(l+1)/r^2 k^2]^{-1/2}, \quad (17.98)$$

откуда следует, что если l фиксировано, а $k \rightarrow \infty$, то $v_{ph} \propto 1/k^2$. Поэтому в данном случае $v_{gr} \rightarrow -v_{ph}$, т.е. для g -мод высокого порядка при фиксированном значении l скорости v_{gr} и v_{ph} имеют противоположные знаки.

Некоторые свойства p - и g -мод высокого порядка можно вывести следующим образом. Используем линеаризованные уравнения неадиабатических пульсаций, чтобы получить общие выражения для $\delta l/\delta r$, где δl — тангенциальная, или трансверсальная, составляющая вектора $\delta \mathbf{r}$ (разд. 17.3), а также для $\delta \rho/\rho$ — относительной лагранжевой вариации плотности. Затем рассмотрим эти выражения в высокочастотном ($\sigma^2 \rightarrow \infty$, p -моды высокого порядка) и низкочастотном ($\sigma^2 \rightarrow 0$, g -моды высокого порядка) пределах. Такой подход позволит легче понять, почему движения элементов массы становятся почти «вертикальными», или радиальными, для высоких частот, и почти «горизонтальными», или трансверсальными, для низких частот.

*Кристensen-Далсгаард [86] на примере политропных моделей показал, что σ^2 не зависит от l при больших l , только если показатель политропы больше 2,191, т.е. только в тех случаях, которые соответствуют, по его словам, «модам, захваченным вблизи локального максимума величины N^2 ». Согласно [86], в полных самосогласованных моделях звезд поведение σ^2 при больших l оказывается в действительности намного более сложным, чем в наших оценках. Например, для любой звездной модели существует класс мод, захваченных вблизи поверхности, у которых σ приблизительно пропорционально $l^{1/4}$.

Начнем с выражения (17.33) для δt , которое в случае сферической звезды, находящейся в гидростатическом равновесии, можно представить через лагранжевы вариации δP и $\delta \psi$. Запишем $\delta \psi = \psi' - \delta r \cdot \mathbf{g}$, где $\mathbf{g} = -\mathbf{e}_r Gm(r)/r^2$ — локальное ускорение силы тяжести. Далее, с помощью механического тождества (5.35а) выразим δP через $\delta \rho$ и δs (лагранжевы вариации плотности и удельной энтропии соответственно). В результате будем иметь соотношение, выражающее δt через $\delta \rho$, δs , δr , ψ' и \mathbf{g} . С помощью уравнения неразрывности (17.27) $\delta \rho$ можно выразить через $\partial(r^2 \delta r)/r^2 \partial r$ и δt . Решая полученное уравнение относительно δt и деля результат на δr , получаем

$$\left[1 - \frac{\Gamma_1 P}{\rho} \frac{l(l+1)}{\sigma^2 r^2}\right] \frac{\delta t}{\delta r} = -\frac{1}{\sigma^2 r} \frac{\Gamma_1 P}{\rho} \frac{1}{\delta r} \frac{\partial(r^2 \delta r)}{r^2 \partial r} + \frac{(\Gamma_3 - 1) T \delta s}{\sigma^2 r \delta r} - \frac{1}{\sigma^2 r} \frac{\delta r \cdot \mathbf{g}}{\delta r} + \frac{1}{\sigma^2 r} \frac{\psi'}{\delta r}. \quad (17.99)$$

Аналогичным образом получаем выражение для $\delta \rho/\rho$

$$\left[1 - (\Gamma_1 P/\rho)l(l+1)/\sigma^2 r^2\right] \delta \rho/\rho = -\partial(r^2 \delta r)/r^2 \partial r + [l(l+1)/\sigma^2 r^2][(\Gamma_3 - 1) T \delta s - \delta r \cdot \mathbf{g} + \psi']. \quad (17.100)$$

В дальнейшем мы в основном будем предполагать, что значение l фиксировано. Рассмотрим сначала высокочастотный предел, $\sigma^2 \rightarrow \infty$ (p -моды высокого порядка). В этом случае вторые члены в квадратных скобках в левых частях уравнений (17.99) и (17.100) становятся пренебрежимо малыми. Кроме того, очень малыми становятся и три последних члена в правых частях обоих уравнений [это очевидно для всех упомянутых членов, за исключением первого из них в правой части (17.99); но можно показать, что и он оказывается малым]; во всяком случае, величинами δs и ψ' пренебрегают при адиабатических колебаниях в приближении Каулинга (разд. 17.9).

Прежде всего отметим, что в рассматриваемом высокочастотном пределе как $\delta t/\delta r$, так и $\delta \rho/\rho$ становятся независимыми от l . Далее, выражение для $\delta \rho/\rho$ в этом пределе оказывается точно таким же, как и в случае чисто радиальных колебаний, указывая на то, что высокочастотные колебания в основном радиальные. В частности, если заменить $\partial/\partial r$ на ik , то в пределе коротких волн ($kr \gg 1$) получим

$$\delta \rho/\rho \approx -ik \delta r, \quad (17.101)$$

откуда следует, что для таких акустических волн величины δr и $\delta \rho$ различаются по фазе приблизительно на 90° .

В первом члене правой части уравнения (17.99) для таких p -мод высокого порядка можно записать $\sigma_p^2 \approx k^2 \Gamma_1 P/\rho$ [что верно при $k^2 \gg l(l+1)/r^2$] и $\partial(r^2 \delta r)/r^2 \partial r \approx ik \delta r$. Тогда, пренебрегая последними тремя членами в правой части (17.99) (поскольку σ^2 велико), получаем

$$\delta t/\delta r \approx -i/(rk). \quad (17.102)$$

Отсюда видно, что для исследуемых мод величина $|\delta t/\delta r|$ — порядка отношения вертикальной длины волны возмущения к текущему радиусу r ; а в настоящем рассмотрении это отношение считается малым. Таким образом, как и указывалось выше, p -моды высокого порядка соответствуют почти вертикальным, или продольным, колебаниям. Отметим также, что δt отстает по фазе относительно δr на 90° , т.е. частицы совершают движение по эллипсам, большие оси которых ориентированы по вертикали.

Рассмотрим теперь низкочастотный предел, $\sigma^2 \rightarrow 0$ (g -моды высокого порядка). В этом случае второй член в скобках в левой части уравнения (17.99) становится большим, и это уравнение можно сократить на множитель σ^{-2} . Оставляя в правой части только первый член и записывая $\partial(r^2 \delta r)/r^2 \partial r \approx ik \delta r$, получаем

$$\delta t/\delta r \approx i r k / [l(l+1)]. \quad (17.103)$$

Таким образом, для g -мод очень высокого порядка (большие k) отношение $|\delta t/\delta r|$ — порядка числа вертикальных длин волны, укладывающихся на радиальном расстоянии r ; а в настоящем рассмотрении это отношение считается большим. Следовательно, такие g -моды очень высокого порядка представляют собой преимущественно горизонтальные, или трансверсальные, движения, как и указывалось выше. Отметим, что сдвиг фаз между δt и δr отличается от сдвига фаз между ними же для p -мод очень высокого порядка ровно на π [ср. (17.103) с (17.102)]. Поэтому в рассматриваемом случае частицы также движутся по приблизительно эллиптическим траекториям, но в противоположном по сравнению с p -модами направлении, причем большие оси эллипсов ориентированы горизонтально.

Некоторый интерес в случае g -мод высокого порядка представляет и выражение для $\delta \rho/\rho$. Из уравнения (17.100), предполагая $P/(\rho \sigma^2 r^2) \gg 1$, получаем

$$\delta \rho/\rho \approx - (1/\Gamma_1)(\delta r/\lambda_p) - (\Gamma_1 g \lambda_p)^{-1}[(\Gamma_3 - 1)T \delta s + \psi'], \quad (17.104)$$

где λ_p — локальная высота однородной атмосферы. Это выражение показывает, что в отличие от p -мод высокого порядка величина $|\delta \rho/\rho|$ с увеличением k не возрастает (т.е. становится независимой от вертикальной длины волны). Кроме того, видно, что на величину $|\delta \rho/\rho|$ для g -мод высокого порядка могут оказывать сильное влияние неадиабатические эффекты (большое $|\delta s|$).

В физической разумности сделанных выше выводов о свойствах вертикальных и горизонтальных движений элементов массы в случаях соответственно p - и g -мод высокого порядка можно убедиться также из следующих соображений.

Полную силу, действующую на заданный элемент массы, а значит, и его ускорение, всегда можно разложить на вертикальную и горизонтальную составляющие. При нерадиальных колебаниях отношение величины горизонтальной составляющей к величине вертикальной составляющей зависит в каждый момент времени только от отклонения возмущенной конфигурации от сферической формы. Если возмущенные величины предполагаются пропорциональными сферическим гармоникам, то мерой такого отклонения от сферичности служат индексы l и m . (Однако поскольку $|m| \leq l$, то в последу-

ющих рассуждениях достаточно принимать во внимание лишь l .) В общем случае l при $m = 0$ равно числу полных «волн», укладывающихся на окружности любого круга, лежащего в меридиональной плоскости. В любой заданный момент времени горизонтальные силы (вызываемые гравитацией и наличием горизонтальных градиентов давления) возрастают по отношению к радиальным силам с увеличением l . Однако в предыдущих рассуждениях значение l предполагалось заданным и поэтому относительная величина горизонтальных сил оставалась фиксированной, т.е. по существу не зависящей от частоты.

Далее, при очень высоких частотах полные ускорения элементов массы должны быть относительно большими. Поскольку, как указано выше, горизонтальные ускорения элементов массы слабо зависят от частоты, полные ускорения, а значит, и перемещения элементов массы в таком высокочастотном пределе должны быть почти вертикальными.

При очень низких частотах полные ускорения элементов массы должны быть относительно невелики. Поскольку и в этом случае зависимость горизонтальных ускорений или сил от частоты слабая, вертикальные компоненты должны быть относительно малыми. Поэтому движение элементов массы должно быть преимущественно горизонтальным. Грубой механической аналогией в земных условиях может служить тело, скользящее без трения по наклонной плоскости, составляющей очень малый угол θ с горизонтальной поверхностью. В этом случае для очень малых θ отношение горизонтального и вертикального перемещений тела составляет $\text{ctg} \theta \approx 1/\theta$.

Из настоящего рассмотрения следует и выражение для величины $(P'/P)/(\delta r/r)$. Используя (17.33), запишем

$$(P'/P)/(\delta r/r) = \sigma^2 r^2 (\rho/P) \delta t / \delta r - [\psi' / (\delta r/r)] \rho / P. \quad (17.105)$$

В случае g -мод высокого порядка можно использовать для σ^2 выражение (17.96), а для $\delta t / \delta r$ — соответствующую предельную форму уравнения (17.99). Однако при однородном химическом составе $|A| \approx |\nabla - \nabla_{\text{ad}}|/\lambda_P$ (разд. 17.2), где λ_P — локальная высота однородной атмосферы. Примем также $r/\lambda_P \sim 1$ и отбросим член, содержащий ψ' (приближение Каулинга); в результате получим

$$\frac{P'/P}{\delta r/r} \sim \frac{|\nabla - \nabla_{\text{ad}}|}{\lambda_P} \frac{k}{k^2 + l(l+1)/r^2}. \quad (17.106)$$

Согласно этому выражению, при $k \rightarrow \infty$ или $l \rightarrow \infty$ $|(P'/P)/(\delta r/r)| \rightarrow 0$. Другими словами, для g -мод очень высокого порядка относительные вариации давления в данной точке (эйлеровы вариации давления) становятся значительно меньше относительных смещений элементов жидкости в указанной точке. Это напоминает предположения, обычно используемые в традиционных теориях конвекции, основанных на концепции длины перемешивания. Перейдем к обсуждению тесной связи между g -модами высокого порядка и конвекции.

С этой целью воспользуемся формулой $N^2 = -Ag$ и выражением (17.15)

для A , где примем среднюю молекулярную массу μ постоянной в пространстве, и подставим N^2 в приближенное выражение (17.96) для σ_g^2 , в котором множитель перед N^2 примем равным единице (нас интересует лишь оценка по порядку величины). Примем также $\chi_T \sim \chi_p \sim 1$, $g \sim GM/R^2$, $\lambda_p \sim R$. В результате для g -мод высокого порядка получаем

$$|\sigma_g| \sim |\nabla - \nabla_{ad}|/t_{ff} \quad (17.107)$$

где $t_{ff} \sim (R^3/GM)^{1/2}$ — время свободного падения (см. гл. 2). Данная оценка для $|\sigma_g|$ — того же порядка, что и вытекающее из теории длины перемешивания обратное время жизни конвективного элемента в конвективной зоне звезды (см., например, [146, Ch. 14]). Это обусловлено тем, что время жизни конвективного элемента равно по порядку величины $|N|^{-1}$. Связь между g -модами высокого порядка и конвективной неустойчивостью рассматривалась также в работе [538].

17.13. Весовые функции

Использование интегральных соотношений, выведенных в гл. 8 для определения с помощью «весовых функций», какие части звезды наиболее сильно влияют на значение периода пульсаций, оказалось исключительно эффективным в случае радиальных колебаний (см. [204] и разд. 8.13). Теперь этот метод обобщен на случай нерадиальных колебаний (см., например, [242, 498]), и мы рассмотрим его, следуя в основном работе Шванка [498].

Шванк применил этот метод только к полнотропам с показателями от 1 до 4; использованные им весовые функции основаны на интегральных выражениях, приведенных в гл. 15 и 16 для случая адиабатических нерадиальных колебаний.

Отметим, что знаменатель интегрального выражения для σ^2 включает в себя интеграл (осцилляторный момент инерции)

$$J = \int_V \xi^* \cdot \xi \rho^2 dr \sin \theta d\theta d\phi, \quad (17.108)$$

где $\xi = \delta r$. Мы отбросили здесь индекс 0 у невозмущенных величин и выразили элемент объема dr в сферических координатах. Интеграл J пропорционален полиноминальной кинетической энергии колебаний в рассматриваемой моде. Разложим вектор ξ на три составляющие в ортогональной системе координат [см. формулу (17.19)] и предположим, что каждая составляющая пропорциональна сферической гармонике (разд. 17.3) и $\exp(i\sigma t)$. Используя свойства сферических гармоник, после небольших преобразований получим

$$J = \text{const} \cdot \int_0^R [(\delta r)^2 + l(l+1)\chi^2/(\sigma^4 r^2)] 4\pi \rho r^2 dr, \quad (17.109)$$

где значение постоянной может зависеть от чисел l и m . Если бы мы имели дело с более общим случаем неадиабатических колебаний, то величины $(\delta r)^2$, χ^2 и σ^4 следовало бы заменить на $|\delta r|^2$, $|\chi|^2$ и $|\sigma|^2$ соответственно.

Легко видеть, что при $l = 0$ этот результат сводится к соответствующему

результату для чисто радиальных колебаний (см. гл. 8). В подынтегральном выражении член, связанный с l , — это вклад в кинетическую энергию на единицу массы, обусловленный трансверсальными (или «горизонтальными») компонентами движения осциллирующих элементов вещества. Если использовать безразмерную переменную $x = r/R$, то интеграл в (17.109) становится интегралом в пределах от 0 до 1 от функции, которую Шванк [498] обозначил $g(x)$. Аналогичное подынтегральное выражение в числителе интегральных соотношений («весовую функцию») Шванк обозначил $f(x)$.

Оказалось, и это, вероятно, неудивительно, что частоты p -мод определяются главным образом условиями во внешних слоях звезд. И наоборот, частоты g -мод определяются в основном условиями в глубоких звездных недрах. Наконец, все области звезды вносят приблизительно одинаковый вклад в частоты f -мод.

17.14. Времена затухания

В этом разделе мы запишем выражение для коэффициента устойчивости, введенное двумя различными способами в гл. 16, специально для случая нерадиальных колебаний. Как указано выше (разд. 17.3), будем предполагать, что любая скалярная величина, связанная с возмущением, пропорциональна сферической гармонике.

Зависимость всех возмущений от времени дается выражением (16.23). В частности, непериодический множитель имеет вид $\exp(-\chi t)$, где вещественная величина χ , коэффициент устойчивости, в случае «малой» неадиабатичности дается выражением (9.13), в котором величина C определяется из (16.21). Напомним, что $|\chi|^{-1}$ — это характерное время нарастания или затухания амплитуды колебаний.

Величину $\delta\rho/\rho$, входящую в C , можно вычислить с помощью уравнения неразрывности (17.27). Рассмотрим теперь величину $\delta[\varepsilon - (\nabla \cdot \mathbf{F})/\rho]$. Используя соотношение (5.16) между эйлеровой и лагранжевой вариациями, получаем

$$\delta[\varepsilon - (\nabla \cdot \mathbf{F})/\rho] = \delta\varepsilon + \ell(\delta\rho/\rho) - (\ell/\rho_0)(d\rho_0/dr)\delta r - \\ - (\nabla \cdot \mathbf{F}')/\rho_0 - \delta r d\ell/dr, \quad (17.110)$$

где индекс 0 относится к невозмущенной конфигурации, предполагаемой сферически симметричной. Величина ℓ определяется соотношением

$$\ell \equiv [(\nabla \cdot \mathbf{F})/\rho]_0 = (dL_r/dm)_0, \quad (17.111)$$

где $L_{r,0} = 4\pi r^2 F_0$ — текущая светимость (количество энергии, выходящее в единицу времени с поверхности сферы радиуса r), причем F_0 — радиальный (и единственный) компонент вектора потока энергии \mathbf{F}_0 ; величина m — обычная массовая переменная.

Чтобы представить $\nabla \cdot \mathbf{F}'$ в явном виде, предположим, что поток \mathbf{F} — только лучистый и определяется уравнением типа уравнения диффузии

$$\mathbf{F} = -K\nabla T, \quad (17.112)$$

где коэффициент лучистой теплопроводности K в общем случае зависит от ρ и T [см. выражение (17.117)]. Ограничиваясь уравнением вида (17.112), мы тем самым ограничиваемся рассмотрением только глубоких звездных недр; более общий анализ проведен, например, в [19]. Если взять эйлерову вариацию от F , выразить $\nabla \cdot F'$ в соответствии с (17.32), а $\delta\rho/\rho_0 (= -\nabla \cdot \delta r)$ в соответствии с (17.27), и затем подставить эти результаты в (17.110), то получим

$$\begin{aligned} \delta[\varepsilon - (\nabla \cdot \delta F)/\rho] = & \delta\varepsilon - \mathcal{E} \partial(r^2 \delta r)/(r^2 \partial r) + \\ & + \mathcal{E} [l(l+1)/(\sigma^2 r^2)] (P'/\rho_0 + \psi') - (\mathcal{E}/\rho_0) \delta r d\rho_0/dr - \\ & - (4\pi r^2 \rho_0)^{-1} \partial[4\pi r^2 (F')_r]/\partial r + \\ & + [l(l+1)/(4\pi \rho_0 r^3)] [L_{r,0}/(d \ln T_0/d \ln r)] T'/T_0 - \delta r d\mathcal{E}/dr. \quad (17.113) \end{aligned}$$

Чтобы упростить это выражение, введем формальную величину L_r , определяемую соотношением

$$L_r = 4\pi r^2 (F)_r, \quad (17.114)$$

где $(F)_r$ — радиальная составляющая потока энергии F . Поскольку в любой момент времени $(F)_r$ в общем случае зависит от полярных углов θ и ϕ , то аналогичным образом зависит и L_r . Следовательно, L_r можно интерпретировать как такое мгновенное значение текущей светимости для сферы радиуса r , которое получилось бы, если бы величина $(F)_r$, взятая при заданных r , θ и ϕ , оставалась неизменной для всех точек этой сферы (т.е. при любых θ и ϕ).

Возьмем от L_r лагранжеву вариацию и используем соотношение (5.16) между обоими типами вариаций. После небольших преобразований мы приходим к соотношению, из которого можно выразить величину $4\pi r^2 (F')_r$ через δL_r и δr . В результате получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi r^2 \rho_0} \frac{\partial[4\pi r^2 (F')_r]}{\partial r} = & \frac{L_{r,0}}{4\pi r^2 \rho_0} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\delta L_r}{L_{r,0}} \right) + \\ & + \mathcal{E} \frac{\delta L_r}{L_{r,0}} - \mathcal{E} \frac{\partial(r^2 \delta r)}{r^2 \partial r} - \frac{\mathcal{E}}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} \delta r - \delta r \frac{d\mathcal{E}}{dr}. \quad (17.115) \end{aligned}$$

При подстановке (17.115) в (17.113) видим, что многие члены сокращаются, и в результате, опуская индекс 0, имеем

$$\begin{aligned} \delta \left(\varepsilon - \frac{\nabla \cdot F}{\rho} \right) = & \delta\varepsilon + \mathcal{E} \left[\frac{l(l+1)}{\sigma^2 r^2} \left(\frac{P'}{\rho} + \psi' \right) - \frac{\delta L_r}{L_r} \right] - \\ & - \frac{L_r}{4\pi r^2 \rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\delta L_r}{L_r} \right) + \frac{l(l+1)L_r}{4\pi \rho r^3} \frac{1}{(d \ln T/d \ln r)} \frac{T'}{T}. \quad (17.116) \end{aligned}$$

При $l = 0$ это уравнение сводится к соответствующему уравнению для чисто радиальных колебаний. В правой части уравнения (17.116) есть два члена,

включающих l . Первый из них обусловлен вариацией $\delta\rho/\rho$, а второй — горизонтальными потоками тепла, которые могут иметь место при нерадиальных колебаниях.

Наконец, получим явное выражение для $\delta L/L$, в случае нерадиальных колебаний. Возьмем лагранжесву вариацию от обеих частей уравнения (17.114), используя при этом уравнение (17.112) для F , а также следующее соотношение для коэффициента лучистой теплопроводности K :

$$K = (4ac/3)T^3/(\chi\rho). \quad (17.117)$$

При взятии лагранжесвой вариации от K учтем выражение (17.27) для $\delta\rho/\rho_0$. Снова отбрасывая индексы 0, после некоторых преобразований получим

$$\delta L/L = 4\delta r/r + 4\delta T/T - \delta\chi/\chi + [T/(dT/dr)]\partial(\delta T/T)/\partial r - \\ - [l(l+1)/\sigma^2 r^2](P'/\rho + \psi'). \quad (17.118)$$

Очевидно, что при $l = 0$ это выражение сводится к соответствующему выражению (7.11а) для чисто радиальных колебаний, справедливому в случае, когда перенос энергии рассматривается в приближении лучистой теплопроводности. Отметим, что в (17.118) член, включающий l , обусловлен только вариацией $\delta\rho/\rho$, которая в случае нерадиальных колебаний может быть связана с горизонтальными движениями элементов массы.

В квазиадиабатическом приближении все величины в уравнениях (17.116) и (17.118) вычисляются с учетом адиабатических соотношений между $\delta P/P$, $\delta\rho/\rho$ и $\delta T/T$. Эти величины в свою очередь определяются, как описано выше в настоящей главе, с использованием собственных функций линейных адиабатических нерадиальных колебаний. Однако соотношения (17.116) и (17.118), которые являются просто тождествами, справедливы и для линейных неадиабатических нерадиальных колебаний и будут использованы в следующей главе.

Численные результаты квазиадиабатических расчетов коэффициента устойчивости можно найти во многих работах, например [407, 408, 508, 509, 593]. Соответствующие характерные времена нарастания или затухания амплитуды колебаний составляют, как правило, от долей года до $10^5 - 10^7$ лет в зависимости от моды колебаний и от рассматриваемой модели звезды.

ГЛАВА 18

ЛИНЕЙНЫЕ НЕАДИАБАТИЧЕСКИЕ НЕРАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ЗВЕЗД

В реальных звездах как радиальные, так и нерадиальные колебания, вообще говоря, являются неадиабатическими, т.е. в процессе колебаний элементы массы приобретают и теряют тепло. Для нерадиальных колебаний неадиабатические эффекты могут оказаться более важными, чем для радиальных, и причина здесь в следующем. Нерадиальные колебания могут происходить с очень низкой частотой, как в случае g -мод высокого порядка (см. гл. 17). Или же очень малой может быть длина волны, связанная с возмущением, как это

имеет место в некоторых областях довольно сложных моделей (см. разд. 17.10). В обоих случаях создаются особенно благоприятные условия для обмена теплом между элементами массы. Несмотря на это, неадиабатичность нерадиальных колебаний обычно пренебрегают в основном, вероятно, из-за математической сложности задачи, а также потому, что неадиабатические эффекты обычно относительно малы в большей части массы звезды. Как уже отмечалось в разд. 17.4 (см. также разд. 18.1), задача о линейных нерадиальных неадиабатических колебаниях в математическом смысле эквивалентна решению системы дифференциальных уравнений 6-го порядка в комплексных переменных, или 12-го порядка в вещественных переменных. В случае же малых адиабатических нерадиальных колебаний мы имеем систему лишь 4-го порядка в вещественных переменных. И даже такая адиабатическая задача достаточно сложна и насыщена информацией. Многие особенности этой задачи начинают проявляться только теперь (см., например, [12, 86, 507, 626]), и несомненно в данной области предстоит еще многое сделать. Поэтому о неадиабатических эффектах нерадиальных колебаний известно довольно мало. Вследствие этого наши замечания в настоящей главе неизбежно будут либо очень краткими, либо не совсем уверенными или, возможно, и теми и другими вместе.

В разд. 18.1 мы сделаем несколько замечаний о порядке уравнений, о граничных условиях для неадиабатических колебаний и т.п., а также отметим, что неадиабатические эффекты, если только они не слишком велики, не изменяют основных характеристик p - и g -мод. В разд. 18.2 будет проведен «локальный» анализ (в приближении коротких длин волн). Будет показано, что выражения для σ^2 , полученные в разд. 17.12 для p и g -мод высокого порядка, при учете неадиабатических эффектов заметно не изменяются, если только эти эффекты не слишком велики. Кроме того, такой анализ даст некоторую информацию об устойчивости мод. Наконец, в разд. 18.3 мы рассмотрим несколько новых теоретических работ, касающихся линейных неадиабатических нерадиальных колебаний.

18.1. Порядок уравнений и граничные условия

Тот факт, что в математическом смысле задача малых нерадиальных неадиабатических колебаний оказывается задачей 6-го порядка (по пространственным координатам) в комплексных переменных, или 12-го порядка в вещественных переменных (см. разд. 17.4), можно интерпретировать еще и следующим образом. Мы замечаем, что в случае сферической звезды для любой моды можно провести разделение переменных, причем угловую зависимость (θ, ϕ) каждой скалярной переменной, связанной с возмущением, можно выразить через сферические гармоники. В результате каждое векторное уравнение оказывается эквивалентным лишь одному скалярному дифференциальному уравнению. В обсуждаемой задаче имеются три векторных дифференциальных уравнения первого порядка: уравнения импульса, потока энергии и одно из двух уравнений Пуассона ($f' = -\nabla\psi'$, где f — сила тяготения на единицу массы, а штрих обозначает, как обычно, эйлерову вариацию). В силу сказан-

ного выше, для сферической звезды эти уравнения эквивалентны трем скалярным дифференциальным уравнениям первого порядка. Три других уравнения (каждое из которых первого порядка по пространственным координатам) уже и так являются скалярными дифференциальными уравнениями. Это уравнение неразрывности, уравнение энергии и второе уравнение Пуассона $\nabla \cdot \mathbf{f}' = -4\pi g\rho'$. Всего мы имеем, таким образом, шесть скалярных дифференциальных уравнений первого порядка для шести комплексных переменных, скажем $P', \rho', \delta r, \psi', d\psi'/dr$ и L'_r .

Отметим, что, как и в случае адиабатических нерадиальных колебаний сферической звезды, неадиабатические нерадиальные колебания такой звезды не зависят от порядка m сферической гармоники, т.е. неадиабатические собственные частоты также $(2l + 1)$ -кратно вырождены.

Рассмотрим теперь граничные условия. Как можно ожидать, таких условий шесть: три в центре и три на поверхности. Четыре из них (два в центре и два на поверхности) появляются дополнительный вектор, например эйлеро-адиабатических колебаний (см. разд. 17.6), а два остальных имеют следующий смысл.

Дополнительное граничное условие в центре связано с тем, что в неадиабатических колебаниях появляется дополнительный вектор, например эйлерова вариация \mathbf{F}' полного потока энергии. В уравнение энергии входит дивергенция этой величины $\nabla \cdot \mathbf{F}'$, которая, очевидно, должна оставаться конечной в центре звезды. Величину \mathbf{F}' можно вычислить, взяв эйлерову вариацию от уравнения диффузии, скажем, в виде (17.112) (более общий анализ проведен в [19]). Тогда вблизи центра

$$T' \propto r'. \quad (18.1)$$

В разд. 17.6 было показано, что граничные условия в центре требуют $P' \propto r'$ вблизи $r = 0$ (лишь в этом случае величины $\nabla \cdot \delta \mathbf{r}$ и $\nabla^2 \psi'$ остаются конечными). Соотношение (18.1) вместе с уравнением состояния ($P' = \chi_\rho \rho' + \chi_T T'$) означает, что вблизи центра также и $\rho' \propto r'$. Отсюда (и из других соображений; разд. 18.2) следует, что основные характеристики нерадиальных колебаний, полученные в адиабатическом приближении, при учете неадиабатических эффектов существенно не изменяются, по крайней мере если эти эффекты малы.

Дополнительное граничное условие на поверхности включает в себя относительные вариации светимости, радиуса и температуры (наряду, быть может, и с другими переменными). Здесь возможны два случая в зависимости от принятой невозмущенной модели. В одном случае модель имеет фотосферу (хотя и определяемую приближенно), и тогда температура поверхности несильно отличается от эффективной температуры T_e . В другом случае модель характеризуется нулевой температурой поверхности. В любом случае можно записать, по крайней мере формально, что $L_r = 4\pi r^2(F_r)$, [см. формулу (17.114)], где L_r — текущая светимость на расстоянии от центра r , а $(F_r)_r$ — радиальная составляющая вектора полного потока энергии \mathbf{F} . Как отмечалось в разд. 17.14, для нерадиальных колебаний величина L_r имеет несколько иной смысл, чем для радиальных колебаний, и является несколько ис-

кусственной. Тем не менее можно формально определить L_p , как указано, и, взяв от нее лагранжеву вариацию, получить выражение для $\delta L_p/L_p$ через $\delta r/r$ и $(\delta F)_r/(F)_r$.

Далее, в первом случае (для модели с фотосферой) можно предположить, что $(F)_r \propto B(T) \propto T^4$, где $B(T)$ — пронитегрированная по частоте функция Планка (T — температура), и тогда

$$\delta L_p/L_p = 2\delta r/r + 4\delta T/T. \quad (18.2)$$

Конечно, все величины здесь относятся к поверхности модели, тогда как внутри звезды $\delta L_p/L_p$ следует вычислять исходя из соотношений, используемых для потока энергии (например, полученных в приближении лучистой теплопроводности; см. ниже). В уравнение энергии [см., например, (17.116)], кроме самой величины $\delta L_p/L_p$ входит ее пространственная производная.

Уравнение (18.2) можно также получить, если предположить, как в [19] или [475], что на поверхность звезды извне не падает никакое излучение.

Во втором случае (когда температура на поверхности модели равна нулю) приближение лучистой теплопроводности также предполагается справедливым всюду внутри звезды, т.е. под поверхностью $\delta L_p/L_p$ можно вычислить способом, описанным в разд. 17.14 [уравнение (17.118)]. Единственное условие, которое мы должны принять на поверхности, — это, что величина $\partial(\delta T/T)/\partial r$ остается там конечной (индекс 0 у невозмущенных величин отброшен). Тогда из (17.118) получаем

$$\delta L_p/L_p = 4\delta r/r + 4\delta T/T - \delta x/x - [(l+1)/\sigma^2 r^2](P'/\rho + \psi'), \quad (18.3)$$

где все символы имеют обычный смысл. Это и есть граничное условие на поверхности для светимости, которое следует использовать во втором случае [вместо (18.2) в первом случае]. При этом предполагается, конечно, что справедливо приближение лучистой теплопроводности, на котором основана приведенная формула.

18.2. Локальный анализ

Локальный анализ часто позволяет получить много полезной информации. При таком анализе предполагают, что длина волны возмущения много меньше всех других характерных длин задач (например, высоты однородной атмосферы). Однако к результатам локального анализа, особенно к выводам об устойчивости, всегда следует относиться осторожно: в вопросах устойчивости в большинстве случаев с полной уверенностью можно полагаться только на исследование поведения системы в целом (глобальный анализ). Тем не менее результаты локального анализа часто оказываются правильными. Кроме того, локальный анализ, математически более простой, чем глобальный, может дать некоторое представление о физической стороне явления. Наконец, даже если локальный анализ не приводит к определенным результатам, он обычно указывает общие закономерности, которые могут быть качественно правильными.

Локальный анализ был с успехом использован в работах [110, 163, 184,

237, 293, 313, 407] и других (см. также превосходное обсуждение у Леду [338]). Чаще всего их авторы интересовались низкочастотным пределом, относящимся к g -модам высокого порядка. В этом пределе обычно используют следующие предположения (они были сделаны и в большинстве упомянутых работ):

а. Считают справедливым приближение Каулинга, $\psi' = 0$ (разд. 17.9); как отмечалось в разд. 17.9, можно ожидать, что такое приближение является довольно хорошим для мод высокого порядка.

б. Жидкость предполагается несжимаемой, т.е.

$$\delta\rho = 0. \quad (18.4)$$

Вероятно, это условие должно быть хорошим приближением для рассматриваемых g -мод высокого порядка (см. [626]). Физически для таких мод движение оказывается настолько медленным, что любое появившееся в жидкости расширение или сжатие успевает рассосаться до такой степени, что условие (18.4) можно считать выполненным. Кроме того, как было показано в разд. 17.12, для g -мод высокого порядка $|\delta\rho|$ не слишком велико, и для очень коротковолновых мод оно становится независимым от длины волны. Следовательно, предположение $\delta\rho = 0$, возможно, оказывается неплохим приближением в случае относительно быстрых изменений в состоянии жидкости, связанных с g -модами высокого порядка (см. п. 18.2а). С другой стороны, для намного более медленных изменений, связанных с теплообменом, на $\delta\rho$ такого ограничения не налагается. Например, при нагревании жидкость может расширяться. (Это приближение, когда принимают $\delta\rho = 0$ для относительно быстрых изменений, но $\delta\rho \neq 0$ для относительно медленных изменений, является следствием «приближения Буссинеска»; см. [542].)

в. Во всех уравнениях, кроме уравнения движения, полагают $P' = 0$, т.е. пренебрегают эйлеровой вариацией полного давления. В уравнение же движения входит градиент этой вариации; и хотя сама величина $|P'|$ может быть малой, величина $|\nabla P'|$ может оказаться значительной [см. ниже замечания в связи с уравнением (8.18)]. Как отмечалось в разд. 17.2, пренебрежение величиной P' (но не $\nabla P'$) обычно оказывается превосходным приближением для g -мод высокого порядка.

При локальном анализе обычно пользуются локальной декартовой системой координат x, y, z с осью z , направленной вдоль радиус-вектора наружу.

Сначала мы проведем анализ специально для g -мод высокого порядка (п. 18.2а), учитывая предположения (а) — (в). Затем в п. 18.2б мы отбросим предположения (б) и (в), а значит, уже не будем ограничиваться g -модами высокого порядка; т.е. мы можем (и будем) рассматривать произвольно высокие частоты, связанные, например, с p -модами высокого порядка или звуковыми волнами. Конечно, этот более общий случай включает в себя, в частности, и случай g -мод высокого порядка.

Поскольку здесь мы имеем дело только с очень короткими волнами, будем предполагать, что все вариации пропорциональны $\exp[i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}]$, где ω — комплексная угловая частота, а \mathbf{k} — волновой вектор. Выбор такой пространственной зависимости оправдывается теми же причинами, что и в

разд. 17.12, а именно: на расстояниях порядка длины волны все коэффициенты дифференциальных уравнений остаются почти постоянными. Мнимая часть величины δ дает угловую частоту колебаний, тогда как вещественная часть содержит информацию об устойчивости волны: если вещественная часть δ положительна, то это означает неустойчивость (колебательную неустойчивость); если же отрицательна, то устойчивость. Радиальную составляющую вектора k обозначим k_r (в гл. 17 эта составляющая обозначалась просто k), а тангенциальную — k_H :

$$k_H = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}, \quad (18.5)$$

где k_x и k_y — составляющие k вдоль осей x и y . Полное волновое число обозначим k_T :

$$k_T = (k_r^2 + k_H^2)^{1/2}. \quad (18.6)$$

В соответствии с принятой экспоненциальной зависимостью вариаций от времени и пространственных координат применение операторов дифференцирования к вариациям эквивалентно умножению на δ или $i k$: $\partial/\partial t \rightarrow \delta$, $\nabla \rightarrow i k$ [исключение будет сделано в связи с уравнением (18.19)].

18.2а. НИЗКИЕ ЧАСТОТЫ

Выпишем теперь основные дифференциальные уравнения с учетом сделанных выше предположений. В приближении Каулинга [предположение (а)] уравнение импульса для радиальной составляющей смещения имеет вид

$$\delta^2 \delta r = -i k_r P' / \rho - \rho' g / \rho, \quad (18.7)$$

где принято, что $dP/dr = -\rho g$.

Уравнение неразрывности таково:

$$\begin{aligned} \delta \rho / \rho &= -\nabla \cdot \delta \mathbf{r} = -\partial(\delta x) / \partial x - \partial(\delta y) / \partial y - \partial(\delta z) / \partial z = \\ &= -i k_x \delta x - i k_y \delta y - i k_r \delta r, \end{aligned} \quad (18.8)$$

где δx , δy и $\delta z \equiv \delta \mathbf{r}$ — это компоненты вектора $\delta \mathbf{r}$ по осям x , y , z . Уравнения импульса для компонентов x и y имеют вид

$$\delta^2 \delta x = -i k_x P' / \rho, \quad \delta^2 \delta y = -i k_y P' / \rho. \quad (18.9)$$

Подставляя эти выражения в уравнение неразрывности, получаем

$$\delta \rho / \rho = 0 = -(k_H^2 / \delta^2) P' / \rho - i k_r \delta r, \quad (18.10)$$

где мы использовали предположение (б) о несжимаемости жидкости.

Теперь с помощью (18.10) можно исключить из уравнения (18.7) величину P' / ρ , что дает

$$\delta^2 (k_T^2 / k_r^2) \delta r = -\rho' g / \rho. \quad (18.11)$$

Далее отметим, что, поскольку в течение «коротких» промежутков времени жидкость считается несжимаемой ($\delta \rho = 0$), $\rho' / \rho = -\delta r d \ln \rho / dr = -\delta r A$, так как $d \ln \rho / dr$ — это значение A (разд. 17.2) для несжимаемой жидкости ($\Gamma_1 = \infty$). Таким образом, имеем

$$\delta^2 = (k_H^2 / k_r^2) A g, \quad (18.12)$$

причем $(-Ag)$ — это квадрат частоты Брунта — Вайся (разд. 17.2). Данный результат совпадает с полученным в разд. 17.2 для g -мод высокого порядка.

Можно отметить, что если бы мы пренебрегли в уравнении импульса флуктуацией давления P' , то получили бы $\delta^2 = Ag$ в точном согласии с результатом разд. 17.2, где предполагалось $P' = 0$. Как установил Гаф [245], флуктуации давления стремятся отклонить вертикальные движения жидкости в горизонтальном направлении.

Такой же результат (18.2) получился бы и в случае адиабатического движения сжимаемого вещества [т.е. движения, для которого выполняется уравнение (5.36a)], если по-прежнему исходить из предположения о малости длины волны возмущения по сравнению с локальной высотой однородной атмосферы. Но в этом случае потребовалось бы провести более громоздкие вычисления.

Однако, чтобы прийти к каким-либо выводам об устойчивости, необходимо допустить, что за большие интервалы времени под действием неадиабатических эффектов (приращений и потерь тепла) происходит изменение плотности ($\delta\rho \neq 0$). Чтобы определить $\delta\rho$ (или ρ'), нужно воспользоваться уравнением энергии. Возьмем его в следующем виде (см. гл. 5):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{T} \right) = \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta P}{P} \right) + \frac{1}{c_p T} \delta(\epsilon - \rho^{-1} \nabla \cdot \mathbf{F}), \quad (18.13)$$

где c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении. Используя соотношение (5.16) между лагранжевой и эйлеровой вариациями, отбрасывая P' [предположение (в)] и учитывая, что $d/dt = \partial/\partial t$, поскольку невозмущенная жидкость покоится, мы можем переписать (18.13) как

$$\delta T'/T = \delta \mathcal{J} \delta r + (c_p T)^{-1} \delta(\epsilon - \rho^{-1} \nabla \cdot \mathbf{F}), \quad (18.14)$$

где

$$\mathcal{J} = [(\Gamma_2 - 1)/\Gamma_2] d \ln P / dr - d \ln T / dr \quad (18.15)$$

[см. также уравнение (18.31)].

Теперь надо выразить $\delta(\epsilon - \rho^{-1} \nabla \cdot \mathbf{F})$ как функцию ρ'/ρ , T'/T и других величин. Будем предполагать, что в невозмущенном состоянии система находится в тепловом равновесии, т.е. $(\epsilon - \rho^{-1} \nabla \cdot \mathbf{F})_0 = 0$. Тогда нет никакого различия между лагранжевыми и эйлеровыми вариациями, и мы имеем

$$\delta(\epsilon - \rho^{-1} \nabla \cdot \mathbf{F}) = (\epsilon - \rho^{-1} \nabla \cdot \mathbf{F})' = \epsilon' + (\rho'/\rho) \epsilon_0 - \rho^{-1} \nabla \cdot \mathbf{F}', \quad (18.16)$$

где ϵ_0 — скорость генерации термоядерной энергии на единицу массы в невозмущенной модели; здесь мы еще раз [во втором члене в правой части (18.16)] использовали предположение, что невозмущенная модель находится в тепловом равновесии.

Чтобы найти величину ϵ' , примем, что она зависит от ρ' , T' и X' , где X' — эйлерова вариация относительного содержания водорода по массе:

$$\epsilon' = \epsilon(\lambda \rho' / \rho + \nu T' / T + \alpha X' / X), \quad (18.17)$$

причем ε — скорость генерации энергии на единицу массы в невозмущенной модели (здесь и далее будем опускать индекс 0), коэффициенты λ и ν характеризуют степенную зависимость генерации энергии соответственно от плотности и температуры [соотношение (7.12)], а величина α определяется как

$$\alpha = (\partial \ln \varepsilon / \partial \ln X)_{\rho, T} \quad (18.18)$$

Для нахождения $\nabla \cdot \mathbf{F}'$ предположим, что выполняется уравнение типа уравнения диффузии [см. (17.112)], в котором коэффициент теплопроводности K (возможно, лучистой теплопроводности, см. разд. 18.1) будем считать постоянным. Однако если бы мы хотели учесть зависимость K от плотности и температуры, то было бы достаточно заменить в последующих выражениях λ на $\lambda - (\partial \ln K / \partial \ln \rho)_T$, а ν на $\nu - (\partial \ln K / \partial \ln T)_\rho$. Запишем теперь $\nabla \cdot \mathbf{F}'$ в следующем виде:

$$\nabla \cdot \mathbf{F}' = -K \nabla \cdot \nabla [(T'/T) \cdot T] = -KT \nabla^2 (T'/T) + 2\mathbf{F} \cdot \nabla (T'/T) + (T'/T) \nabla \cdot \mathbf{F}.$$

Далее, в соответствии с тем, что все равновесные величины считаются по существу постоянными в пространстве, мы можем пренебречь вторым членом в правой части, поскольку $\mathbf{F} \propto \nabla T$. Однако член с $\nabla \cdot \mathbf{F}$ необходимо сохранить, иначе рассматриваемые физические эффекты будут сильно искажены. (Аналогичная ситуация имела место в гл. 13 в связи с однозонной моделью Бейкера, где мы рассматривали все физические переменные в пределах зоны как постоянные, за исключением L_r в уравнении энергии; если бы мы считали и L_r постоянной, то неправильно исказили бы физическую картину явления.) Итак, можно выразить $\delta(\varepsilon - \rho^{-1} \nabla \cdot \mathbf{F})$ через ρ'/ρ , T'/T и X'/X . Подставив это выражение в уравнение энергии (18.14), приходим к следующему соотношению между T'/T , ρ'/ρ , X'/X и δr :

$$\{\delta - [\varepsilon(\nu - 1) - (KT/\rho)k_p^2]/c_p T\} (T'/T) = \delta \mathcal{A} r + [\varepsilon(\lambda + 1)/c_p T] \rho'/\rho + (\varepsilon \alpha / c_p T) (X'/X). \quad (18.19)$$

Чтобы получить другое соотношение между T'/T , ρ'/ρ и другими величинами, можно использовать уравнение состояния. Варьируя его по Эйлеру, имеем

$$P'/P = 0 = \chi_\rho \rho'/\rho + \chi_T T'/T + \chi_\mu \mu'/\mu, \quad (18.20)$$

где мы учли предположение (в), $P' = 0$; коэффициенты χ_ρ , χ_T и χ_μ определены в разд. 17.2, а μ — средняя молекулярная масса.

Полагая, что характерное время развития возмущений мало по сравнению с временем, необходимым для заметного изменения химического состава элемента массы вследствие термоядерных реакций (это время приблизительно равно характерному ядерному времени звезды), можно выразить μ'/μ и X'/X через δr , поскольку в этом случае $\delta\mu/\mu$ и $\delta X/X$ равны нулю, откуда

$$\mu'/\mu + \delta r d \ln \mu / dr = 0, \quad (18.21a)$$

$$X'/X + \delta r d \ln X / dr = 0. \quad (18.21b)$$

Теперь объединим вышеприведенные уравнения таким образом, чтобы по-

лучить дисперсионное соотношение для δ . У нас есть три основных уравнения: комбинированное уравнение неразрывности и импульса (18.11), уравнение энергии (18.19) и уравнение состояния (18.20). Если считать X'/X и μ'/μ выражаемыми, согласно (18.21), через δr , то имеем три неизвестных: ρ'/ρ , T'/T и δr . Таким образом, имеем систему трех линейных однородных уравнений для трех неизвестных. Для существования нетривиального решения необходимо, чтобы определитель системы обращался в нуль. Приравняв определитель нулю, мы и получим искомое дисперсионное соотношение, которое является уравнением третьей степени относительно δ . После некоторых упрощений его можно записать в виде

$$\delta^3 - \{[\varepsilon(\nu - 1) - (KT/\rho)k_T^2]/c_p T - (\chi_T/\chi_\rho)\varepsilon(\lambda + 1)/c_p T\}\delta^2 - \{(\chi_T/\chi_\rho)\mathcal{L} - (\chi_\mu/\chi_\rho)d\ln\mu/dr\}(k_H^2/k_T^2)g\delta + \{1 - (c_p T)^{-1}[\varepsilon(\nu - 1) - (KT/\rho)k_T^2](\chi_\mu/\chi_\rho)d\ln\mu/dr + (\chi_T/\chi_\rho)(\varepsilon\alpha/c_p T)d\ln X/dr\}(k_H^2/k_T^2)g = 0. \quad (18.22)$$

Обратим внимание на одно тождество. Если учесть определение \mathcal{L} (18.15) и некоторые термодинамические тождества, а также соотношение

$$d\ln P/dr = \chi_\rho d\ln\rho/dr + \chi_T d\ln T/dr + \chi_\mu d\ln\mu/dr, \quad (18.23)$$

которое вытекает из уравнения состояния звездного вещества, то можно показать, что

$$(\chi_T/\chi_\rho)\mathcal{L} - (\chi_\mu/\chi_\rho)d\ln\mu/dr = d\ln\rho/dr - (d\ln P/dr)/T_1 = A, \quad (18.24)$$

где A определено в разд. 17.2 [формула (17.6)].

Рассмотрим сначала очевидный малый «вскоковой» корень уравнения (18.22). Его значение так мало, что можно пренебречь степенями δ выше первой. Этот корень равен

$$\delta_{\text{secular}} = -1(-A)^{-1} \left[\frac{\varepsilon(\nu - 1) - (KT/\rho)k_T^2(-\chi_\mu)}{c_p T} \frac{d\ln\mu}{dr} + \frac{\chi_T}{\chi_\rho} \frac{\varepsilon\alpha}{c_p T} \frac{d\ln X}{dr} \right]. \quad (18.25)$$

Учитывая, что в случае устойчивости относительно конвекции $A < 0$ и что для реалистичных уравнений состояния величина χ_μ обычно также отрицательна, мы видим из (18.25), что при отсутствии термоядерных реакций ($\varepsilon = 0$) δ отрицательно (что свидетельствует об устойчивости), если справедливо неравенство $d\ln\mu/dr < 0$, обычно выполняющееся в процессе эволюции звезды. Однако если $d\ln\mu/dr > 0$, то $\delta > 0$, что свидетельствует о неустойчивости относительно медленных, напоминающих конвекцию движений, развивающихся с характерным тепловым временем. Такую неустойчивость иногда называют неустойчивостью Рэлея — Тейлора. Она была названа также «теплообменной» неустойчивостью (см., например, [586]) и еще «квазиконвекцией» [146, § 13.3 и S.23.2]. В [146, § 13.3] дано физическое объяснение этой неустойчивости. Оно основано на том, что в области устойчивой относительно конвекции, на элемент вещества, медленно смещенный из положения равновесия, не будут действовать никакие результирующие силы, такие, как неуравновешенные выталкивающие силы, приводящие к конвективной неустойчивости в обычном смысле. Тем не менее в области с про-

странственным изменением химического состава такой элемент будет иметь температуру, в общем случае отличную от температуры окружающей среды. Из-за этой разности температур элемент будет получать или терять тепло, что приведет к дальнейшему смещению элемента, а значит, к дальнейшему изменению плотности. В результате элемент либо медленно вернется к своему исходному положению (устойчивость), либо будет по-прежнему от него удаляться (неустойчивость).

Если же, с другой стороны, $\varepsilon \neq 0$, то сделанные выводы могут измениться. Предположим, например, что элемент медленно переместился наружу из своего равновесного положения. Если он двигался достаточно медленно, то давление внутри него всегда будет совпадать с давлением окружающей среды [предположение (в)]. Кроме того, при достаточно медленном движении не могут появиться никакие неуравновешенные выталкивающие силы, т.е. плотность элемента также должна совпадать с плотностью окружающих слоев. Однако средняя молекулярная масса остается такой же, как на его первоначальном уровне. Поэтому если средняя молекулярная масса невозмущенной среды убывает наружу ($d \ln \mu / dr < 0$), как это обычно имеет место, то при рассматриваемом перемещении элемента его средняя молекулярная масса окажется больше, чем окружающих слоев. Следовательно, если уравнение состояния сколько-нибудь напоминает закон идеального газа, то температура элемента будет выше, чем температура окружающих слоев. Если бы не было источников ядерной энергии, то элемент просто терял бы тепло, охлаждался, сжимался и в конце концов вернулся бы в свое исходное положение. Однако если имеются ядерные источники и если они достаточно чувствительны к температуре (т.е. ν достаточно велико) или достаточно интенсивны [$\varepsilon(\nu - 1) > (KT/\rho)k_2^2$], то избыточная по сравнению с окружающей средой температура элемента приведет к усиленному энерговыделению и, возможно, к дальнейшему нагреву, а следовательно, и к дальнейшему движению наружу. Другими словами, вещество может оказаться неустойчивым относительно медленного перемешивания, как и показывает уравнение (18.25).

Что же можно сказать теперь о члене $d \ln X / dr$ в (18.25)? Этот член вносит отрицательный (т.е. стабилизирующий) вклад в Φ , если $d \ln X / dr > 0$, как обычно бывает в эволюционирующей звезде. Конечно, величины $d \ln X / dr$ и $d \ln \mu / dr$ связаны между собой. Предполагая, что μ зависит только от относительных содержаний по массе водорода, гелия и остальных химических элементов, обозначая эти содержания соответственно X , Y , Z (см., например, [146, eq. (15.17)]) и считая Z постоянным, имеем

$$d \ln \mu / dr = -\frac{1}{4} X d \ln X / dr. \quad (18.26)$$

Следовательно, увеличение X в направлении наружу будет вызывать уменьшение μ наружу. Происхождение знака минус в правой части (18.25) легко понять. Элемент вещества имеет химический состав, соответствующий тому уровню в звезде, на котором этот элемент образовался. Таким образом, если в невозмущенной среде X возрастает наружу и если элемент движется также наружу, то X в нем будет, очевидно, меньше, чем в окружающих слоях. Поскольку водород считается основным ядерным топливом, то из-за понижен-

ного значения X энергосодержание в элементе будет менее интенсивным по сравнению с окружающей средой. Таким образом, этот эффект способствует остыванию элемента, его сжатию и тем самым возвращению на первоначальный уровень, т.е. делает движение более устойчивым (отрицательный вклад в δ). (О применении этих результатов к проблеме возможного перемешивания Солнца см., например, в разд. 19.6.)

Рассмотрим теперь корни уравнения (18.22), соответствующие g -модам высокого порядка, для которых $|\delta|$, вероятно, также мало, но тем не менее оно много больше, чем $|\delta_{\text{secular}}|$. Сначала рассмотрим адиабатический предел, считая, что неадиабатические эффекты малы. Формально этому предельному случаю соответствует $\varepsilon = 0$ и $K = 0$ в уравнении (18.22). Тогда коэффициенты при четных степенях δ (включая нулевую) обратятся в нуль. Обозначим корни уравнения (18.22) в этом пределе как δ_0 . Предполагая, что $\delta_0 \neq 0$, имеем

$$\delta_0 = \pm i(k_H/k_T)(-Ag)^{1/2}, \quad (18.27)$$

где $(-Ag)^{1/2}$ — частота Брунта — Вейселя (разд. 17.2).

Запишем теперь

$$\delta = \delta_0 + \Delta\delta, \quad (18.28)$$

где примем, что $|\Delta\delta| \ll |\delta_0|$. Подставляя (18.28) с учетом (18.27) в (18.22) и пренебрегая степенями $|\Delta\delta|$ выше первой, можно решить уравнение относительно $\Delta\delta$. Отмечая, что $\chi_\rho c_p = \Gamma_1 c_V$ (разд. 4.2) и используя тождество (18.24), получаем

$$\Delta\delta = \frac{1}{2} \left[\frac{\mathcal{A} \chi_T \varepsilon (\nu - 1)}{\chi_\rho} \frac{1}{c_p T} - \frac{1}{A} \frac{\varepsilon \alpha}{c_p T} \frac{\chi_T}{\chi_\rho} \frac{d \ln X}{dr} - \frac{\chi_T}{\chi_\rho} \frac{\varepsilon (\lambda + 1)}{c_p T} \right], \quad (18.29)$$

что по существу согласуется с результатами Осаки [407]. При отсутствии источников ядерной энергии ($\varepsilon = 0$) имеем

$$\Delta\delta = -\frac{1}{2} (\mathcal{A}/A) (\chi_T/\chi_\rho) (KT/\rho) k_T^2 / c_p T. \quad (18.30)$$

На основе соотношения (18.15) можно записать

$$\mathcal{A} = (\nabla - \nabla_{\text{ad}}) / \lambda_p, \quad (18.31)$$

где λ_p — локальная высота однородной атмосферы, $\nabla = d \ln T / d \ln P$, $\nabla_{\text{ad}} = (\Gamma_2 - 1) / \Gamma_2$. Это выражение необходимо сравнить с выражением (17.15) для A . В областях однородного химического состава \mathcal{A} и A совпадают, если $\chi_T/\chi_\rho = 1$ (что выполняется для идеального газа), и из (18.30) следует, что любые колебания в конце концов затухают. То же самое происходит и в случае неоднородного химического состава, если вещество устойчиво относительно конвекции в обычном смысле, т.е. если $A < 0$ и $\mathcal{A} < 0$ (действительный градиент температуры меньше адиабатического); тогда $\Delta\delta < 0$. Однако если $A < 0$, но $\mathcal{A} > 0$ (температурный градиент сверхадиабатический), то, согласно (18.30), $\Delta\delta > 0$ и имеет место колебательная конвекция с нарастающей амплитудой (см. ниже), впервые обнаруженная Като [293]. Вероятно, такое явление должно возникать в полуконвективных зонах. Его физическое объяснение представлено в [146, § S. 23.2]. Коротко говоря, элемент вещества, адиа-

батически смещенный, например, вглубь от своего равновесного положения, при $A < 0$ будет иметь меньшую плотность, чем окружающие слои. Тогда результирующая архимедова сила будет выталкивать его обратно (наружу), и вещество будет устойчиво относительно конвекции в обычном смысле. Однако если $\mathcal{A} > 0$, то элемент, смещенный вглубь, будет холоднее окружающего вещества, и поэтому он начнет нагреваться. Нагревание приведет к расширению элемента, что еще сильнее понизит его плотность. Таким образом, благодаря поступлению тепла выталкивающая сила немного увеличится, т.е. последующее движение наружу будет происходить быстрее, чем в отсутствие нагрева. Следовательно, в рассматриваемом случае осциллирующий элемент будет получать при своих отклонениях вглубь и наружу дополнительный «толчок», и очевидно, что такое движение будет колебательно неустойчивым. Его и называют «колебательной конвекцией с нарастающей амплитудой».

Аналогичное рассмотрение привело бы и к результатам работы [184], касающимся проблемы солнечных нейтрино, если бы мы учли должным образом соответствующие физические условия, т.е. если бы предположили, что ε' в (18.17) зависит также и от содержания изотопа ${}^3\text{He}$ (см. [338]). Отметим, что член с $d \ln X / dr$ способствует неустойчивости, если он положителен в конвективно устойчивой области ($A < 0$). (Если бы учитывался изотоп ${}^3\text{He}$, то появился бы аналогичный член и с тем же знаком для содержания по массе ${}^3\text{He}$.) Физическая интерпретация этого результата такова. Рассмотрим область, которая устойчива относительно конвекции в обычном смысле ($A < 0$) и в которой, кроме того, $\mathcal{A} < 0$ (действительный градиент меньше адиабатического), как это обычно имеет место. Тогда элемент, который немного сдвинулся (адиабатически), например, вглубь, будет менее плотным и более горячим, чем окружающие слои. Повышенная температура элемента приведет к усилению в нем энерговыделения, и этот эффект будет способствовать колебательной неустойчивости, как следует из уравнения (18.29) (член, содержащий ν). Кроме того, если $d \ln X / dr > 0$, то элемент, движущийся вглубь, будет характеризоваться более высоким содержанием водорода, чем окружающие слои, что еще больше усилит разность между генерацией энергии в элементе и окружающей среде. Этот эффект также будет способствовать колебательной неустойчивости [см. уравнение (18.29)]. Такое влияние градиентов содержаний водорода и ${}^3\text{He}$ служит основной причиной колебательной неустойчивости, обнаруженной в работах [87, 184].

Отметим, что если $A < 0$, но $\mathcal{A} > 0$, то член, учитывающий ядерные реакции (т.е. член с ν) в (18.29) оказывает противоположное действие по сравнению с членом (содержащим K), приводящим к возникновению колебательной конвекции с нарастающей амплитудой.

18.26. ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ЧАСТОТЫ

Ниже мы не будем предполагать, что $|\delta|$ обязательно мало, и поэтому нам нет необходимости принимать предположения (б) и (в), сформулированные в начале разд. 18.2. Однако поскольку мы все еще имеем дело с модами высокого порядка, то будем по-прежнему считать справедливым предположение (а).

Тогда уравнение импульса (18.7) для радиальной составляющей смещения

сохранится, а уравнение неразрывности изменится [прежняя его форма — уравнение (18.10)] и будет иметь вид

$$(k_H^2/\delta^2)P'/\rho = -\rho'/\rho - \delta r(d \ln \rho/dr) - ik_r \delta r. \quad (18.32)$$

Как и выше, это уравнение можно использовать для исключения P'/ρ из уравнения импульса. В результате вместо уравнения (18.11) получим

$$\delta^2(k_T^2/k_H^2)\delta r = (ik_r \delta^2/k_H^2 - g)\rho'/\rho + (\delta^2/k_H^2)ik_r \delta r d \ln \rho/dr. \quad (18.33)$$

Уравнение энергии остается прежним [см. уравнение (18.14)], но теперь оно содержит дополнительный член P'/P . Если относительно величины $\delta(\varepsilon - (\nabla \cdot \mathbf{F})/\rho)$ сделать те же предположения, что и выше, то результирующее уравнение энергии установит связь между P'/P , T'/T , ρ'/ρ , X'/X и δr [см. соотношение (18.19)].

Уравнение состояния [ср. с (18.20)] с $P'/P \neq 0$ дает связь между P'/P , T'/T , ρ'/ρ и μ'/μ .

Уравнение неразрывности (18.32), как мы уже видели, дает связь между P'/P , ρ'/ρ и δr .

Наконец, уравнения (18.21а,б) — это два соотношения, связывающие μ'/μ с δr и X'/X с δr .

Четыре последних уравнения можно использовать, чтобы выразить P'/P , T'/T , μ'/μ и X'/X через ρ'/ρ и δr . Подставляя довольно громоздкое результирующее выражение в (18.33), получим уравнение пятой степени относительно δ . Упростим его с помощью некоторых термодинамических тождеств и других преобразований и примем во внимание приближение коротких волн (когда длина волны возмущения много меньше всех характерных длин задачи, за исключением характерных длин изменений X или μ). После громоздких алгебраических преобразований получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_T^2 \Gamma_1 P} \delta^5 - \frac{1}{k_T^2 \Gamma_1 P} \frac{\varepsilon(\nu-1) - (KT/\rho)k_T^2}{c_V T} \delta^4 + \delta^3 + \\ + \left[\frac{\chi_T}{\chi_\rho} \frac{\varepsilon(\lambda+1)}{c_P T} - \frac{\varepsilon(\nu-1) - (KT/\rho)k_T^2}{c_P T} \right] \delta^2 - \frac{k_H^2}{k_T^2} A g \delta - \\ - \frac{k_H^2}{k_T^2} g \left[\frac{\chi_\mu}{\chi_\rho} \frac{\varepsilon(\nu-1) - (KT/\rho)k_T^2}{c_P T} \frac{d \ln \mu}{dr} - \frac{\chi_T}{\chi_\rho} \frac{\varepsilon \alpha}{c_P T} \frac{d \ln X}{dr} \right] = 0. \quad (18.34) \end{aligned}$$

Адиабатический предельный случай можно получить, приравняв формально нулю величины ε и K в (18.34). Тогда коэффициенты при всех четных степенях δ (включая нулевую) обратятся в нуль. Если считать $\delta \neq 0$, то остается квадратное уравнение относительно δ^2 , которое фактически такое же, как и уравнение, рассмотренное в разд. 17.12 (за исключением использованного там предположения, что квадрат частоты Бруита — Вайселя, $|Ag|$, много меньше каждого из членов $k_H^2 \Gamma_1 P/\rho$ и $k_T^2 \Gamma_1 P/\rho$). В частности, для большого $|\delta|$ получаем (как и в разд. 17.12):

$$\delta^2 \approx -k_T^2 \Gamma_1 P/\rho = -(k_T^2 + k_H^2) \Gamma_1 P/\rho. \quad (18.35)$$

Можно показать, что предположение о большом значении δ аналогично предположению об адиабатичности, как того и следует ожидать из физических соображений.

Для малого $|\delta|$ уравнение (18.34) приводит к результатам, совпадающим с полученными в разд. 18.2а.

В случае большого $|\delta|$ можно поступить так же, как и в разд. 18.2а, и положить $\delta = \delta_0 + \Delta\delta$, где $|\Delta\delta| \ll \delta_0$ и где δ_0 определяется из соотношения (18.35). Пренебрегая степенями $|\Delta\delta|$ выше первой, получаем

$$\Delta\delta = [\epsilon(\nu - 1) - (KT/\rho)k^2](1 - \chi_p/\Gamma_1)/2c_\nu T + (\chi_T/\Gamma_1)\epsilon(\lambda + 1)/2c_\nu T. \quad (18.36)$$

Как показывает данный результат, при отсутствии термоядерных реакций ($\epsilon = 0$) амплитуда высокочастотного возмущения будет вследствие теплопроводности непрерывно уменьшаться со временем (что представляется вполне вероятным и свидетельствует об устойчивости). С другой стороны, всякое выделение термоядерной энергии ($\epsilon \neq 0$) будет, как можно ожидать, оказывать обратное действие, т.е. будет способствовать увеличению амплитуды возмущения со временем (колебательная неустойчивость).

18.3. Новые исследования

В настоящем разделе мы кратко рассмотрим некоторые последние работы, посвященные расчетам линейных неадиабатических нерадиальных колебаний сферических звездных моделей.

Вероятно, первое исследование такого рода было выполнено Крнстеисеном-Далсгаардом и Гафом [88] применительно к проэволюционировавшей (т.е. современной) модели Солнца. Главной целью работы было проверить результаты предыдущих квазиадиабатических расчетов вибрационной устойчивости модели Солнца относительно нерадиальных колебаний в низших модах g^+ при низких значениях l (в частности, $l = 1$). Согласно их предыдущей работе [87], эта модель оказалась колебательно неустойчивой в моде g_1^+ ($l = 1$) благодаря градиенту содержания ^3He в модели (физическое объяснение эффекта см. в разд. 18.2). Неустойчивость в этой моде имеет важное значение в связи с проблемой солнечных нейтрино (см. [29, 30, 87] и ссылки в последней статье; см. также разд. 18.2).

Работа [88] показала, что почти по всему объему модели неадиабатические собственные функции практически совпадают с соответствующими адиабатическими собственными функциями. Неадиабатические эффекты оказались заметными в самых внешних слоях непосредственно под фотосферой, причем толщина слоев составила лишь около 300 км. Именно в этой области наши знания о строении Солнца являются, вероятно, наиболее неполными. Возможно, что здесь наряду с лучистым существует и конвективный перенос энергии. Авторы работы [88] пренебрегли вариациями конвективного потока (что вполне понятно). В этом тонком слое было обнаружено сильное затухание, сравнимое по величине с возбуждением в недрах. Авторы пришли к заключению, что из-за многочисленных неопределенностей в строении самых внешних слоев в настоящее время нельзя сделать уверенных выводов о коле-

бательной неустойчивости Солнца в нерадиальных модах g^+ низкого порядка.

Следующей работой в рассматриваемом направлении, вероятно, явилось очень важное исследование Андо и Осаки [19]. Применительно к модели солнечной оболочки они решили уравнения линейных нерадиальных неадиабатических пульсаций в приближении Каулинга (авторы нашли, что для их задачи это приближение хорошо оправдывается). Статья содержит много интересных и полезных результатов, и здесь мы упомянем лишь некоторые из них. Так, лучистый перенос рассматривался в рамках несколько видоизмененного приближения Эддингтона, которое является более точным по сравнению с приближением лучистой теплопроводности. Приближение Эддингтона описывается в статье Унно [588, App]. Унно и Спигел [594] показали, что это приближение согласуется с результатами точного расчета лучистого переноса как в оптически тонком, так и в оптически толстом пределах. Но конечно, в общем случае оно все же является некоторым приближением.

Авторы нашли, что низшие p -моды оказались захваченными (разд. 17.10) во внешней конвективной зоне Солнца, но в фотосфере и над ней имеют характер исчезающих волн. Основная причина захвата состоит в том, что в конвективной области частота Брунта — Вайсяля N (разд. 17.2) становится очень малой (равной нулю в случае адиабатической конвекции), а сразу над конвективной областью возрастает, достигая довольно больших значений (см. [19, Fig. 1]). С другой стороны, критическая акустическая частота S_i [формула (17.89)] также меньше весьма высоких частот, интересующих авторов, даже для рассмотренных ими довольно высоких сферических гармоник ($10 \leq l \leq 1500$). Следовательно, часть конвективной области попадет в акустическую область A . Однако в фотосфере и над ней угловые частоты, которые представляют интерес, оказываются, как правило, меньше N , но все еще больше S_i . Поэтому фотосферные и несколько более высокие области являются в соответствии с анализом, проведенным в разд. 17.10, областями исчезающих волн.

Интересно, что большинство захваченных p -мод оказались колебательно неустойчивыми. Основное дестабилизирующее влияние связано с κ -механизмом Бейкера и Киппенхана [36] (см. также гл. 9 настоящей книги), хотя небольшую роль играет механизм, изученный Муром и Спигелом [385]. Оказалось, что приближение лучистой теплопроводности приводит к большей неустойчивости, чем приближение Эддингтона, и авторы [385] указали причины такого различия. Большая часть энергии пульсаций в этих низких p -модах сконцентрирована в тонком слое (толщиной примерно 1000 км) сразу под фотосферой. Однако из-за быстрого падения плотностей с высотой в равновесной модели энергия пульсаций непосредственно над фотосферой быстро падает до нуля.

Вероятно, наиболее интересный результат состоит в том, что самые неустойчивые из захваченных p -мод располагаются на диаграмме «угловая частота σ — горизонтальное волновое число k_H » в длинной вытянутой области (похожей на горный хребет на географической карте), локализованной при частоте, приблизительно соответствующей периоду 300 с, в широком диапазо-

не горизонтальных длин волн, скажем от ~ 1000 км до немного более 300000 км. Приведенные числа согласуются с параметрами пятиминутных осцилляций, открытых Лейтоном и др. [347] и позднее описанных, например, в работах [172, 223, 391]. Последующие наблюдения (см. [450] и ссылки в этой работе), по-видимому, окончательно подтверждают интерпретацию пятиминутных пульсаций как p -мод иерадiallyных колебаний. Другие модели пятиминутных пульсаций Солнца можно найти в обзоре [544]. См. также некоторые ссылки в [19].

В исследовании Андо и Осаки [19] пренебрегалось взаимодействием конвекции и пульсаций, и это вполне понятно, поскольку надежная теория неустановившейся конвекции отсутствует. Авторы признают, что такое взаимодействие может оказаться важным и может изменить их результаты. Они также подчеркивают чувствительность результатов к использованной модели солнечной оболочки. Как отмечают авторы, существенную роль могут играть и потери энергии в форме бегущих волн, распространяющихся в хромосферу и корону, что в их модели не рассматривалось.

В своей следующей работе Андо и Осаки [20] приняли во внимание эту возможную утечку энергии посредством бегущих волн. Были получены по существу те же выводы, что и ранее. Другими словами, очевидно, что указанные потери энергии не очень существенны, по крайней мере если говорить об их влиянии на результаты анализа устойчивости. В частности, эти потери невелики для горизонтальных длинных волн и вообще отсутствуют для горизонтальных коротких волн, поскольку короткие волны не распространяются в корону.

В дальнейшем Андо [18] использовал методы, развитые в [19], для изучения возможности возбуждения акустических иерадiallyных колебаний с большими l (от 10 до 1500) в звездах поздних спектральных классов в широкой области на диаграмме Герцшпрунга — Рассела. Он нашел, что захват волн, подобный происходящему в водородной конвективной зоне Солнца (см. выше), — довольно распространенное явление, особенно в звездах, достаточно холодных для того, чтобы иметь хорошо развитую водородную конвективную зону. Он нашел также, что эти захваченные акустические моды, как правило, колебательно неустойчивы и неустойчивость обусловлена в основном действием α -механизма Бейкера и Киппенхана [36] (см. гл. 9). Для звезд, несколько более холодных, чем в полосе неустойчивости цефеид (см. рис. 3.1), темп нарастания амплитуды η (относительное увеличение амплитуды за период) в максимально неустойчивых модах при изученных значениях l описывается приближенной интерполяционной формулой $\eta \propto g^{-0.5} T_e^6$, где g — ускорение силы тяжести на поверхности звезды, а T_e — эффективная температура. Андо высказал предположение, что возникающая хромосферная активность может объяснить эффект Уилсона — Баппу [623]. (Однако эти общие идеи в отношении эффекта Уилсона — Баппу, по-видимому, не согласуются с результатами работы [24].)

Расчеты Снбахаси и Осаки [508, 509] не были неадиабатическими (анализ устойчивости проводился в квазиадиабатическом приближении), но их результаты, по мнению автора настоящей книги, достаточно важны и заслужи-

вают хотя бы краткого упоминания. В [508] были изучены нерадиальные колебания при больших l для звезд с массами 15 и $30 M_{\odot}$, имеющих полуконвективные зоны. Один из очень интересных результатов этой работы состоит в том, что при больших l ($l \geq 8$) нерадиальные колебания таких звезд попадают в один из двух весьма различных классов: либо преимущественно g -моды, захваченные в области с градиентом μ на границе конвективного ядра, либо преимущественно p -моды, захваченные в звездной оболочке. С ростом l такое разделение на два класса становится все более четким. (Дальнейшее рассмотрение этого эффекта можно найти в [507, 593].)

При анализе устойчивости авторы нашли, что g -моды с большими l ($= 15$), которые были захвачены в полуконвективной зоне с переменным значением μ , оказались колебательно неустойчивыми. Эта неустойчивость физически соответствует колебательной конвекции с нарастающей амплитудой, обнаруженной ранее Като [293] на основе локального анализа и рассмотренной в разд. 18.2. Полученный результат можно считать ответом на критику результатов Като [293] в работах [22, 228], в которых подчеркивался локальный характер анализа Като. Захват колебаний в области с градиентом μ означает, что амплитуды нерадиальных g -мод велики как раз в тех областях, где они и должны быть относительно большими для того, чтобы действовал механизм Като. Однако, как отметили авторы, подобная колебательная неустойчивость, вероятно, не имеет ничего общего (по крайней мере непосредственно) с неустойчивостью звезд типа β Цефея (гл. 3) в основном потому, что последняя связана, по-видимому, с малыми l ($= 2$ или даже 0). Кроме того, в статье представлена новая схема классификации мод, основанная на вышеупомянутом раздвоении колебаний на g -моды, захваченные в ядре, и p -моды, захваченные в оболочке. Эта схема более ясно отражает физическую природу нерадиальных колебаний звезды (см. также [626]).

В своей второй работе Сибакиси и Осаки [509] исследовали неустойчивость массивных звезд (с массами 5, 11, 20 и $40 M_{\odot}$) относительно нерадиальных колебаний в g -модах, захваченных в области с градиентом μ (см. выше). В этой области происходит слоевое термоядерное горение водорода, которое служит причиной любой возможной колебательной неустойчивости. Лишь некоторые из моделей оказались неустойчивыми: модель $20 M_{\odot}$ для значения $l = 10$ и модель $40 M_{\odot}$ для нескольких l (от 11 до 40). Кроме того, времена нарастания колебаний в неустойчивых модах оказались относительно большими, порядка характерных времен эволюции, и все неустойчивые моды стали устойчивыми к тому времени, когда звезды превратились в красные гиганты. Общий вывод таков, что несколько обнаруженных случаев колебательной неустойчивости, обусловленной слоевым горением водорода, вероятно, не имеют непосредственного отношения к наблюдаемым пульсациям звезд типа β Цефея (гл. 3).

Причины, по которым изученные модели часто оказывались устойчивыми, весьма интересны, и они довольно подробно освещены в [509], однако из-за недостатка места мы не можем больше останавливаться на этих результатах.

В последнее время появился ряд расчетов нерадиальных неадиабатических

колебаний звезд различных типов (главным образом расчеты Осаки и Дзембовского). В частности, Осаки [409] исследовал вибрационную устойчивость относительно нерадиальных колебаний для моделей цефеид. Одним из наиболее интересных результатов Осаки [409] явился в конечном счете следствие того, что в моделях звезд с высокой концентрацией вещества к центру (полагают, что таковы цефеиды) нерадиальные колебания с типичными для цефеид частотами обладают во внутренних областях свойствами g -мод. Причины такого двойственного поведения нерадиальных колебаний в моделях с высокой концентрацией вещества к центру были указаны в разд. 17.10. Гравитационный характер таких мод был также отмечен и объяснен Дзембовским [187], показавшим, что в этих очень плотных центральных областях нерадиальные колебания (по существу, g -моды) имеют очень малые вертикальные длины волн и выше тысячи узлов. Как следствие, для этих волн даже в глубоких звездных недрах очень большую роль играют неадиабатические эффекты. Дзембовски [187] оценил неадиабатические эффекты с помощью квазиадиабатического приближения, и они оказались настолько большими, что характерные времена затухания этих внутренних волн получились лишь в несколько раз больше периодов пульсаций для типичной звезды-гиганта. Это привело автора к заключению, что в звездах типа цефеид нерадиальные колебания либо не возбуждаются, либо их возбуждение является очень слабым. В последующей работе Дзембовски [188], основываясь на аналогичных рассуждениях, пришел к такому же выводу в отношении моделей звезд горизонтальной ветви, которые могут представлять модели звезд типа RR Лиры.

Осаки [409] знал о таких малых временах затухания и установил, что такие коротковолновые g -моды распространяются очень медленно (скорость распространения пропорциональна квадрату длины волны; разд. 17.12). Поэтому он заключил, что из-за неадиабатических эффектов эти короткие волны должны затухать задолго до того, как они достигнут звездного центра и затем отразятся обратно, образуя стоячие волны. Таким образом, по мнению Осаки, нерадиальные колебания моделей звезд-гигантов не могут иметь характера обычных стоячих волн. Волны, бегущие в направлении центра звезды сильно поглощаются: центральные области образуют своего рода «сток» для нерадиальных колебаний. В связи с этим Осаки переформулировал внутреннее граничное условие, чтобы согласовать его с потерями энергии пульсаций в форме волн, бегущих в направлении центра.

Учет эффектов бегущих волн в центральных областях посредством внутреннего граничного условия позволил рассмотреть звездную оболочку как практически изолированную пульсирующую область для p -мод, эффективно захваченных в пределах оболочки (Осаки [409] назвал их модами p); точно так же можно рассматривать чисто радиальные пульсации моделей звезд-гигантов (п. 9.26).

Осаки [409] нашел, что из-за оттока энергии пульсаций в звездные недра нерадиальные колебания при малых l оказываются устойчивыми. Однако при больших l ($l \geq 6$ для моды \bar{f}_1 и $l \geq 4$ для моды \bar{p}_1 в обозначениях Осаки) колебания оказались неустойчивыми в результате раскачивающего влияния зон ионизации водорода и гелия (гл. 10). Темп нарастания амплитуды

для этих неустойчивых нерадиальных мод \bar{p}_1 с большими l получился того же порядка, что и в случае чисто радиальных колебаний аналогичных моделей.

Несмотря на то что такие нерадиальные колебания оказались в проведенном линейном анализе [409] неустойчивыми, они обычно в цефеидах не наблюдаются. По мнению Осаки, это может быть связано с тем, что нелинейные эффекты по какой-то причине благоприятствуют радиальным модам. Он также высказал предположение, что неустойчивые нерадиальные моды высокого порядка могут объяснить «микротурбулентность» или «макротурбулентность», проявляющуюся в спектрах гигантов и сверхгигантов, как раньше принимал Люси [354] для α Лебеда, а еще раньше Серковски [504] для U Единорога (переменная типа RV Тельца) и Шол [506] для α Кита (Мира Кита) (см. также [501]). Малые колебания в течение коротких промежутков времени (порядка месяцев) наблюдались почти у всех сверхгигантов [1, 212, 357, 464].

В важной работе Дзембовского [190] очень основательно и подробно рассмотрена вся проблема линейных неадиабатических колебаний, как радиальных, так и нерадиальных, для звезд различных типов, включая гиганты и сверхгиганты.

Чтобы рассмотреть квазиадиабатический случай точнее, чем прежде, Дзембовски получил асимптотические решения линеаризованного уравнения энергии с учетом лучистой теплопроводности, справедливые для радиальных и нерадиальных мод в глубоких звездных недрах. Нахождение асимптотических решений было основано на методах, разработанных советскими математиками (см., например, [213]). С помощью этих решений Дзембовски нашел, что во многих случаях обычный квазиадиабатический анализ может привести к совершенно ошибочным результатам в отношении нерадиальных колебаний в глубоких звездных недрах, даже несмотря на то что неадиабатические эффекты там могут быть очень малы. В частности, амплитуды g -мод высокого порядка, захваченных в глубоких недрах моделей звезд-гигантов с высокой концентрацией вещества к центру, могут оказаться значительно меньше, чем предсказывается обычной квазиадиабатической теорией. Дзембовски отметил, что эти очень малые амплитуды захваченных g -мод высокого порядка можно объяснить с помощью бегущих волн, уходящих в звездные недра, в согласии с результатом Осаки [409]. Оба автора независимо пришли к одинаковому виду внутреннего граничного условия, учитывающего эти эффекты.

Дзембовски [190] рассмотрел также g -моды высокого порядка, захваченные в области с градиентом μ в недрах проэволюционировавших моделей и пришел по существу к тем же самым выводам, что Сибахаси и Осаки [508] (см. выше в данном разделе), а именно, что такие волны имеют в указанной области довольно большие амплитуды (колебательная конвекция с нарастающей амплитудой, обнаруженная Като).

Дзембовски [190] пришел к общему выводу, что нерадиальные колебания в оболочках некоторых типов звезд могут возбуждаться посредством тех же неонзационных механизмов, которые, как считают, ответственны за пульса-

цин цефеид, переменных типа RR Лиры и других звезд (гл. 10), и могут иметь приблизительно такой же темп нарастания амплитуды, как и в случае радиальных колебаний. В частности, он нашел, что в оболочках моделей звезд горизонтальной ветви, которые могут представлять модели переменных типа RR Лиры, моды p_1 при малых значениях l устойчивы. Однако при больших значениях l ($\approx 6 - 7$) моды p_1 оказались неустойчивыми приблизительно с такими же инкрементами нарастания амплитуды, как для радиальных мод. Этот результат напоминает результат Осаки [409] для модели звезды-гиганта, которая может представлять модель цефеиды. Дзембовски [190] обнаружил также неустойчивость нерадиальных мод f при больших значениях l (от ~ 100 до 200) для моделей с гораздо более высокими эффективными температурами (вплоть до $\sim 10\,000$ К), чем для переменных типа RR Лиры в полосе неустойчивости на диаграмме Герцшпрунга — Рассела.

Кроме того, Дзембовски [190] исследовал модель сверхгиганта, предлагаемую для описания звезды α Лебеда, и нашел, что эта модель колебательно неустойчива только при высоких значениях l в согласии с предыдущими результатами Люси [354]. Однако он нашел, что в более холодном сверхгиганте, лежащем вблизи полосы неустойчивости цефеид на диаграмме Герцшпрунга — Рассела, возбуждаются моды с более низкими значениями l .

В этой же работе Дзембовски исследовал и устойчивость моделей звезд типа δ Щита относительно радиальных и нерадиальных колебаний (см. обзоры [52, 219], посвященные этим звездам). Как и раньше (см. [188]), он нашел, что указанные модели колебательно неустойчивы во многих модах, как радиальных, так и нерадиальных, и все такие моды имеют сравнимые инкременты роста амплитуды. Автор высказал предположение, что эти многочисленные возбужденные моды вполне могут взаимодействовать между собой. Такое взаимодействие может объяснить (по крайней мере частично) сложное наблюдаемое поведение многих подобных объектов (см. гл. 3 и [52]).

В работе [191] Дзембовски рассчитал вариации блеска звезды при нерадиальных колебаниях.

С помощью полностью неадиабатического нерадиального анализа Дзембовски [189] исследовал устойчивость моделей белых карликов относительно радиальных и нерадиальных колебаний. Целью работы являлось теоретическое изучение переменных белых карликов класса DA (или звезд типа ZZ Кита), свойства которых были суммированы в работах [363, 365, 392, 604] (гл. 3). Исходя из более раннего результата Воклера [607], Мак-Гро и Робинсон [365] высказали предположение, что основная причина переменности, как и для обычных цефеид, связана со второй ионизацией гелия в оболочке (см. гл. 10) (см., однако, [147]).

Модели, использованные Дзембовским [189] для проверки указанного предположения, имеют оболочки, богатые водородом и гелием. Однако эти оболочки слишком холодны для термоядерного «горения» водорода и гелия. Основной результат расчетов состоит в том, что хотя зона второй ионизации гелия всегда создает заметный дестабилизирующий эффект, тем не менее радиальные, а также все нерадиальные моды относительно низкого порядка n с малыми значениями l оказываются устойчивыми. Сюда попадают и те

g -моды с низкими l (1 или 2) и относительно низкого порядка (приблизительно $\leq 20 - 25$), периоды которых соответствуют наблюдаемым периодам белых карликов класса DA; моды f и p имеют слишком короткие периоды. С другой стороны, иерархические g -моды порядка $\sim 10 - 20$ и при больших l (сотни и тысячи) оказались очень неустойчивыми с временами нарастания амплитуды порядка нескольких суток. Моды f при больших l , а в некоторых случаях и моды p , также оказались колебательно неустойчивыми. Дзембовски пришел к выводу, что переменные белые карлики класса DA, возможно, образуют продолжение полосы неустойчивости цефеид к звездам с самыми высокими известными эффективными температурами и ускорениями силы тяжести на поверхности (исключая, вероятно, нейтронные звезды, которые мы здесь не рассматриваем).

Однако самовозбуждающиеся моды имеют слишком короткие периоды по сравнению с наблюдаемыми у таких звезд. (Как было установлено в разд. 17.12, при больших l периоды g -мод почти не зависят от l , за исключением случая однородной модели. Однако при уменьшении l периоды g -мод обычно увеличиваются; см., например, [53, 603].) Поэтому Дзембовски [189] высказал предположение, что устойчивые моды с низкими l , имеющие периоды в наблюдаемом диапазоне, возбуждаются посредством нелинейного взаимодействия с неустойчивыми короткопериодическими модами с большими l . Он представил несколько доводов в пользу такой точки зрения и призвал к разработке теории взаимодействия мод для иерархических колебаний (некоторые соображения о взаимодействии радиальных мод можно найти в [345, § 86 — 88]). Теория переменных белых карликов обсуждается в очень интересной и обстоятельной работе ван Хорна [604].

В последующих расчетах Дзембовски [192] нашел, что g -моды с низкими l , периоды которых соответствуют наблюдениям, в действительности могут возбуждаться посредством механизма скачка непрозрачности, предложенного Стеллингверфом (см. разд. 10.1 и 13.1).

Сикевич и Дзембовски [511] исследовали вибрационную устойчивость аккрецирующих белых карликов в тесных двойных системах. Авторы нашли, что при высоком темпе аккреции все моды, как радиальные, так и иерархические, оказываются неустойчивыми. Во всех случаях причиной неустойчивости является термоядерное возбуждение в водородном или гелиевом слоевом источнике, расположенном вблизи поверхности звезды. Инкременты нарастания амплитуды для g -мод на три порядка больше, чем для радиальных, f - или p -мод. [Причиной такого сильного возбуждения g -мод служит то, что в белых карликах g -моды имеют заметные амплитуды только во внешних слоях, см. [53]. Почти по всему объему белого карлика частота Брунта — Ваясыла $N = (-Ag)^{1/2}$ (разд. 17.2) близка к нулю, тогда как критическая акустическая частота S_1 (разд. 17.10) довольно высока. Для интересующих нас собственных частот g -мод мы почти по всему объему белого карлика имеем $N < \sigma < S_1$. Поэтому, согласно разд. 17.10, почти вся внутренняя область белого карлика при рассмотрении g -мод оказывается в области исчезающих волн.] Неустойчивые g -моды имеют характерные времена нарастания амплитуды порядка месяцев, а периоды колебаний составляют 10 — 50 с. Тем не

менее авторы не делают предположений о том, что неустойчивость g -мод аккрецирующих белых карликов объясняет осцилляции, наблюдаемые при вспышках карликовых новых (гл. 3).

Сайо и Кокс [475] провели расчеты линейных нерадиальных неадиабатических колебаний моделей массивных звезд главной последовательности, а также несколько сильнее проэволюционировавших массивных звезд. Неадиабатические перноды получились почти точно такими же, как и в адиабатическом случае. Кроме того, почти по всей модели звезды неадиабатические собственные функции практически совпали с адиабатическими. Основной целью работы являлась проверка эффективности механизма скачка непрозрачности Стеллингверфа (разд. 10.1 и 13.1) для возбуждения нерадиальных колебаний.

ГЛАВА 19

СМЕШАННЫЕ ВОПРОСЫ

В настоящей главе мы кратко рассмотрим ряд эффектов, которые появляются, если отбросить некоторые из многочисленных упрощающих предположений, принимавшихся почти во всех предыдущих главах. Многие из этих эффектов до сих пор еще не полностью изучены, и некоторые из них активно исследуются в настоящее время. Поэтому изложение различных вопросов будет в большинстве случаев довольно кратким и, вероятно, поверхностным; данную главу в отличие от остальных следует в значительной степени рассматривать лишь как указатель литературы.

Например, до сих пор не изучено влияние вязкости (молекулярной или любого другого вида, например, лучистой) на колебания звезд в самом общем случае; оно было довольно подробно рассмотрено только для чисто радиальных колебаний (см., например [146, ch.27 и ссылки в ней; 345, § 47, 49, 71]). Некоторые шаги в связи с исследованием колебаний частично кристаллизовавшихся белых карликов были предприняты ван Хориом и Саведовым [605], а новый и весьма тщательный анализ колебательных свойств таких систем провели Хансенom и ван Хорном [258].

Пожалуй, наиболее обширные исследования были посвящены влиянию вращения на колебания звезд, и эти вопросы рассматриваются в разд. 19.1. Эффекты крупномасштабных магнитных полей являются качественно иными и изучены менее подробно; они рассматриваются в разд. 19.2. В разд. 19.3 кратко обсуждается очень трудная, важная и все еще нерешенная проблема взаимодействия звездных пульсаций и конвекции. В последние годы был проведен довольно исчерпывающий анализ влияния нарушения теплового баланса на звездные пульсации, и эти эффекты рассматриваются в разд. 19.4.

Эффекты общей теории относительности были весьма подробно изучены в линейном адиабатическом приближении, их обсуждение, а также соответствующие библиографические ссылки представлены в разд. 19.5. Там же обсуждаются и цитируются работы, в которых одновременно учитывались как эффекты вращения, так и эффекты общей теории относительности. Если специально не оговорено, то в данной главе мы всегда будем действовать в рамках нерелятивистского приближения.

Вопросы вековой устойчивости — это частный случай теории пульсаций; они кратко рассматриваются в разд. 19.6.

Наконец, в разд. 19.7 мы попытаемся оценить общее место и значение теории пульсаций в изучении звезд и звездной эволюции.

19.1. Влияние вращения

19.1a. ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ

Анализ звездных пульсаций при учете вращения очень труден. Вращение изменяет и сильно усложняет строение даже невозмущенной (непульсирующей) звезды, и эти многочисленные трудности рассмотрены, например, в обзорных статьях [227, 329, 370, 413, 469, 560, 602] (см. также [35; 500, §21; 612; 632, p.38] и статьи в сборнике [522]). Недавно вышла в свет прекрасная монография Тассуля [565], в которой рассматриваются все аспекты вращения звезд. Твердотельное вращение несжимаемого сфероида было изучено еще в 1889 г. [56, 352]. Примером возникающих при учете вращения усложнений, как впервые показано в [612] (см. также [35]), служит то, что звезда, деформированная вращением, в общем случае не может находиться в тепловом равновесии. Такие отклонения от теплового равновесия обычно приводят к возникновению медленных «меридиональных течений», скорость которых обычно порядка произведения величины R/t_K на отношение центробежного и гравитационного ускорений, где R — радиус звезды, а t_K — характерное время Кельвина — Гельмгольца (гл. 2) [403, 563]. Меридиональные течения порождают ряд проблем, которые были обсуждены, например, в [404, 406]. Кроме того, существуют ограничения на распределение угловой скорости вращения внутри звезды. Например, согласно [226, 237] (см. также [286]), момент количества движения на единицу массы в звезде не может уменьшаться в направлении наружу.

Общее исследование вращающихся жидкостей связано с решением сложных задач, и им посвящена обширная литература (см., например, книги Чандрасекара [72], Гринспэна [249], Бэтчелора [42, гл. 7]).

Можно отметить, что в случае звезд большинство усложняющих эффектов возникает в конечном счете из-за несферичности звезды, а несферичность в свою очередь обусловлена центробежной силой на единицу массы, $\tilde{\omega}^2$, где $\tilde{\omega}$ — расстояние от оси вращения, а Ω — угловая скорость вращения*. Поскольку центробежная сила пропорциональна Ω^2 , при достаточно медленном вращении звезды эту силу и вызываемую ею несферичность можно считать пренебрежимо малыми.

На элемент массы в пульсирующей и вращающейся звезде при ее колебаниях действуют наряду с обычными еще две силы: *центробежная сила* и *сила Кориолиса*. Как указано выше, первая из них пропорциональна Ω^2 , тогда как вторая пропорциональна лишь Ω . Поэтому силу Кориолиса необходимо учи-

* В этом и последующих разделах для обозначения угловой скорости используется символ Ω . Не путайте с обозначением безразмерной частоты пульсаций, использовавшимся в предыдущих главах (особенно в гл. 8 и 17)!

тывать, даже-если звезда вращается настолько медленно, что можно пренебречь центробежной силой. Из-за наличия двух этих сил неудивительно, что в звезде, которая одновременно вращается и пульсирует, могут возникать совершенно новые явления. Например, как показал Папалоизу и Прингл [418], становятся важными крутильные колебания (разд. 17.3), приводящие к образованию волн типа волн Россби с отличными от нуля частотами. Если вращение настолько медленное, что можно пренебречь отклонениями от сферичности, то угловая частота таких мод равна $2m\Omega/(l+1)$, где l и m — соответственно степень и порядок сферических гармоник. Папалоизу и Прингл назвали этот новый вид колебаний g -модами.

Очевидно, что в звезде с произвольно быстрым вращением не могут существовать чисто радиальные колебания. Тем не менее если звезда вращается не слишком быстро, то при ее колебаниях лагранжевы смещения элементов массы могут оказаться преимущественно радиальными с относительно малыми тангенциальными составляющими (этот вывод с очевидностью следует из уравнения (82.12) в [345] или из уравнения (52) в [356]). Такие колебания называют квазирадialными, и в пределе исчезающе малой скорости вращения они становятся чисто радиальными.

Почти во всех работах о влиянии вращения на звездные пульсации предполагалось, что колебания являются адиабатическими, причем лагранжевы вариации давления и температуры определяются соотношениями (5.36). Если специально не оговорено, то в оставшейся части данного раздела мы также будем использовать это предположение. Оказывается, что вращение (по крайней мере если оно лишь слегка искажает форму звезды) всегда оказывает стабилизирующее влияние на квазирадialные колебания в том смысле, что для таких колебаний критическое значение показателя адиабаты Γ_1 , ниже которого звезда является динамически неустойчивой (гл. 8), становится меньше $\frac{1}{2}$ (см., например, [78; 113; 133; 136; 332; 345, §82], а также ссылки в [136]). Как показано в [330], этот стабилизирующий эффект имеет место не только при твердотельном вращении, но и для любого вида дифференциального вращения, по крайней мере если $\Gamma_1 = \text{const}$. Дальнейшее рассмотрение динамической устойчивости вращающихся звезд выполнено, например, в [45].

19.16. ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ДЛЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЗВЕЗДЫ

В гл. 15 уже отмечалось, что для вращающейся звезды собственные функции и собственные значения линейного адиабатического волнового уравнения по-прежнему подчиняются вариационному принципу, но его нужно несколько модифицировать. Здесь мы рассмотрим данный вариационный принцип, следуя в основном превосходному анализу Линден-Белла и Острайкера [356]. Как мы увидим, наиболее существенная часть модификации состоит в том, что для применимости вариационного принципа собственная частота ω должна быть чисто вещественной. Первым, кто показал, что собственные функции и собственные значения линейного адиабатического волнового уравнения в случае однородно вращающейся звезды действительно подчиняются некоторому вариационному принципу, был Клемейт [100], но он не уточнил, что этот принцип применим только к вещественному ω .

Выше (разд. 15.2) мы уже видели, что для невращающейся звезды собственные частоты ω являются либо чисто вещественными, либо чисто мнимыми. Однако для вращающейся звезды частота ω может оказаться комплексной (см. ниже). Поэтому во вращающейся звезде может, например, возникнуть такое довольно необычное явление, как колебательная конвекция с нарастающей амплитудой (см. ниже, а также [345, §82]).

Рассмотрим линеаризованное уравнение движения в общем виде (15.18). Далее, запишем

$$d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla = \partial/\partial t + M, \quad (19.1)$$

где \mathbf{v}_0 — скорость жидкости в невозмущенном (неосциллирующем) состоянии, а второе равенство служит определением оператора M . Если течение установившееся, то $\partial \mathbf{v}_0 / \partial t = 0$, и операторы $\partial/\partial t$ и M коммутативны. Если принять также что $\xi(\mathbf{r}, t) = \xi(\mathbf{r}) \exp[i\omega t]$, где $\xi(\mathbf{r}, t) = \delta \mathbf{r}$ — лагранжево смещение элемента массы, то линейное адиабатическое волновое уравнение принимает следующий вид:

$$-\omega^2 \xi + 2i\omega M\xi + M^2\xi = -\mathcal{P}(\xi) - \mathcal{V}(\xi), \quad (19.2)$$

где операторы \mathcal{P} и \mathcal{V} были определены в разд. 15.3.

По аналогии с [356] это уравнение можно записать как

$$-\omega^2 \mathbf{A}(\xi) + \omega \mathbf{B}(\xi) + \mathbf{C}(\xi) = 0, \quad (19.3)$$

где операторы \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} определяются соотношениями

$$\mathbf{A}(\xi) = \xi, \quad (19.4a)$$

$$\mathbf{B}(\xi) = 2iM\xi, \quad (19.4b)$$

$$\mathbf{C}(\xi) = M^2\xi + \mathcal{P}(\xi) + \mathcal{V}(\xi), \quad (19.4b)$$

Умножая (19.3) скалярно на $\xi^* \rho d\tau$ ($d\tau$ — элемент объема, а звездочка обозначает комплексно сопряженную величину) и интегрируя по всему объему V конфигурации, имеем

$$-a\omega^2 + b\omega + c = 0, \quad (19.5)$$

где

$$a = \int_V \xi^* \cdot \mathbf{A}(\xi) \rho d\tau = \int_V \xi^* \cdot \xi \rho d\tau, \quad (19.6)$$

и т.п. [Отметим, что a — это осцилляторный момент инерции, обозначенный в гл. 8 и 16 символом J ; см. также уравнение (15.6).]

Как показано в [356], операторы \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} являются самосопряженными в смысле соотношения (15.11). Отсюда следует, что все числа a , b и c вещественные.

Рассмотрим теперь $\xi(\mathbf{r})$ как произвольную, достаточно регулярную векторную функцию от \mathbf{r} [т.е. не обязательно как решение линейного адиабатического волнового уравнения (19.3)], а ω — просто как решение квадратного уравнения (19.5) (т.е. не обязательно как собственную частоту линейного адиабатического волнового уравнения) (в разд. 15.2 соответствующие величины

обозначались как $u(r)$ и Σ). Представим теперь, что функция $\xi(r)$ испытывает в каждой точке r малое изменение $\Delta\xi$, причем величины r и все невозмущенные величины остаются в течение этого изменения постоянными. Тогда, варьируя уравнение (19.5), мы получим выражение, содержащее $\Delta\xi$, $\Delta\xi^*$, $\Delta A(\xi)$, $\Delta B(\xi)$, $\Delta C(\xi)$ и $\Delta\omega$, где $\Delta\omega$ — соответствующее изменение величины ω . Однако из линейности операторов A , B и C следует, что $\Delta A(\xi) = A(\Delta\xi)$, и т.д. Кроме того, вследствие самосопряженности этих операторов ξ^* и $\Delta\xi$ в упомянутом выражении коммутативны. Отметим наконец, что операторы A и C чисто вещественные, а оператор B чисто мнимый. Конечный результат можно записать в виде

$$(-2a\omega + b)\Delta\omega + \int_V (\Delta\xi^*) \cdot \{-\omega^2 A(\xi) + \omega B(\xi) + C(\xi)\} \rho d\tau + \\ + \int_V (\Delta\xi) \cdot \{-\omega^2 A(\xi^*) - \omega B(\xi^*) + C(\xi^*)\} \rho d\tau = 0. \quad (19.7)$$

Теперь если ξ — решение линейного адиабатического волнового уравнения (19.3), то первый интеграл в (19.7) обращается в нуль. Однако ξ^* в общем случае не является решением уравнения

$$-\omega^2 A(\xi^*) - \omega B(\xi^*) + C(\xi^*) = 0, \quad (19.8)$$

а представляет собой решение комплексно сопряженной формы уравнения (19.3). Отсюда следует, что в общем случае ω не подчиняется вариационному принципу.

Однако если ω вещественно, то уравнение (19.8) и комплексно сопряженная форма уравнения (19.3) совпадают, а тогда величина в фигурных скобках во втором интеграле в (19.7) также обращается в нуль, и мы имеем $\Delta\omega = 0$, т.е. ω в данном случае подчиняется вариационному принципу.

Итак, мы доказали следующее: если величина ω вещественна, то для звезды с внутренними установившимися движениями определяемое уравнением (19.5) значение ω имеет экстремум относительно произвольных малых вариаций функции $\xi(r)$ в том случае, если $\xi(r)$ — одна из собственных функций $\xi_k(r)$ линейного адиабатического волнового уравнения (19.3), при этом экстремальное значение ω совпадает с адиабатической собственной частотой ω_k для k -й моды.

Отметим, что некоторые выводы разд. 15.2 можно рассматривать как частный результат проведенного анализа.

Как показал Шутц [495], с помощью небольшой модификации подхода Лиидеи-Белла и Острайкера [356] (на котором были основаны наши рассуждения) можно получить вариационный принцип, который оказывается применимым как для вещественных, так и для комплексных собственных значений.

Решение квадратного уравнения (19.5) имеет вид

$$\omega = b/2a \pm (b^2/4a^2 + c/a)^{1/2}. \quad (19.9)$$

Из самого определения величины a видно, что она является положительной, тогда как b и c не обязательно положительны, хотя всегда вещественны. От-

рицательное c соответствует динамической неустойчивости невращающейся звезды ($b = 0$) (разд. 15.2). С другой стороны, в случае вращающейся звезды отрицательное c может подразумевать комплексное значение ω . В свою очередь комплексное значение ω проявится как колебательная конвекция с нарастающей амплитудой; физическая картина этого явления рассматривается в п. 19.1в. Отметим, что выражение (19.9) в некоторой степени отражает стабилизирующее влияние вращения: видно, что величина c должна иметь достаточно большое отрицательное значение, чтобы частота ω оказалась комплексной; а в отсутствие вращения при любом отрицательном значении c звезда будет динамически неустойчивой.

19.1в. РАСЩЕПЛЕНИЕ ЧАСТОТ НЕРАДИАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВСЛЕДСТВИЕ ВРАЩЕНИЯ

В гл. 17 и 18 мы указывали, что порядок сферических гармоник m не входит ни в одно из уравнений линейных нерадиальных адиабатических или неадиабатических колебаний статических сферических звезд. Поэтому собственные частоты нерадиальных колебаний таких звезд $(2l + 1)$ -кратно вырождены для каждой моды (разд. 17.3). Однако во вращающейся звезде это вырождение полностью снимается: для заданного значения l собственная частота расщепляется на $(2l + 1)$ подуровней, соответствующих $m = -l, -(l - 1), \dots, (l - 1), l$. При медленном вращении это расщепление симметрично относительно частоты, соответствующей $m = 0$, которая совпадает с частотой в отсутствие вращения; с увеличением скорости вращения звезды разность частот между соседними подуровнями возрастает. (Такое расщепление совершенно аналогично эффекту Зеемана в атомной физике.)

В последующем изложении мы вернемся к нашим прежним обозначениям (гл. 8) и будем писать J вместо a [см. уравнение (19.6)]: $J = a$. Кроме того, мы будем рассматривать лишь члены первого порядка относительно угловой скорости вращения Ω . Если бы мы сохраняли члены, пропорциональные Ω^2 , то соответствующие интегралы следовало бы брать по конфигурации, деформированной вращением (см., например, [521, 527]). Записывая

$$\omega = \sigma_0 + \sigma', \quad (19.10)$$

где σ_0 — угловая частота колебаний невращающегося объекта, а σ' — поправка на эффект вращения, имеем из уравнений (19.9) и (19.6)

$$\sigma' = b/2a + O(\Omega^2) = (i/J) \int_V \xi^* \cdot (M\xi) d\tau + O(\Omega^2), \quad (19.11)$$

где оператор M определен согласно (19.1), а $O(\Omega^2)$ означает «члены порядка Ω^2 ».

Введем систему цилиндрических координат $(\bar{\omega}, \phi, z)$ и запишем

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_M + v_\phi \mathbf{e}_\phi, \quad (19.12)$$

где \mathbf{v}_M — скорость в меридиональной плоскости:

$$\mathbf{v}_M = v_{\bar{\omega}} \mathbf{e}_{\bar{\omega}} + v_z \mathbf{e}_z, \quad (19.13)$$

причем $v_{\bar{\omega}}$, v_ϕ и v_z — соответствующие составляющие вектора \mathbf{v}_0 ;

$v_\phi \mathbf{e}_\phi$ — скорость в направлении ϕ , а \mathbf{e}_i — единичные векторы вдоль соответствующих осей. Если движение в направлении ϕ вызвано вращением, то

$$v_\phi = \tilde{\omega} \Omega, \quad (19.14)$$

где ось вращения параллельна оси z . Если учесть, что единичные базисные векторы могут при дифференцировании менять направление, и если принять зависимость компонентов вектора ξ от ϕ в виде $\xi_{\omega, \phi, z} \propto \exp[i m \phi]$, то после несложных преобразований получим

$$M\xi = (\mathbf{v}_M \cdot \nabla)\xi + im\Omega\xi + \Omega \times \xi. \quad (19.15)$$

Если движения в невозмущенной системе представляют чистое вращение, т.е. если мы пренебрегаем меридиональными потоками, то нужно лишь положить $\mathbf{v}_M = 0$ в уравнении (19.15). Отметим для полноты, что в случае чистого вращения ($\mathbf{v}_M = 0$)

$$M^2\xi = M(M\xi) = -m^2\Omega^2\xi + 2im\Omega(\Omega \times \xi) + \Omega \times (\Omega \times \xi), \quad (19.16)$$

и ясно, что данная величина порядка Ω^2 .

Подставляя (19.15) в (19.11), получаем следующее выражение для поправки вследствие вращения к адиабатической угловой частоте (с точностью до первого порядка относительно Ω):

$$\sigma' = -(m/J) \int_V \Omega \xi^* \cdot \xi \rho d\tau + (i/J) \int_V \xi^* \cdot (\Omega \times \xi) \rho d\tau + O(\Omega^2). \quad (19.17)$$

При $\Omega = \text{const}$ данное выражение согласуется с результатами [113; 333; 345, §82], если принять во внимание, что уравнение (19.17) было получено в инерциальной, а не во вращающейся системе отсчета. Второй интеграл в (19.17) также оказывается пропорциональным m . Это следует из того, что с учетом $\Omega_\phi = 0$ подынтегральное выражение в рассматриваемом интеграле пропорционально компоненту ξ_ϕ , который в свою очередь содержит не только множитель $\exp(im\phi)$, как все остальные компоненты ξ , но еще и пропорционален m . Отметим, что по порядку величины $|\sigma'| \sim |\Omega|$.

В случае твердотельно вращающейся звезды ($\Omega = \text{const}$) выражение для расщепления частот иногда целесообразно записать в системе координат, вращающейся с постоянной угловой скоростью Ω . Тогда соответствующая поправка к частоте колебаний будет образована лишь вторым слагаемым в правой части уравнения (19.17). Этот результат становится понятным, если принять во внимание, что нерадиальные колебания с $m \neq 0$ представляют собой азимутальные бегущие волны, распространяющиеся при $m < 0$ в направлении возрастания ϕ , а при $m > 0$ в направлении убывания ϕ .

Из уравнения (19.17) следует, что при $m = 0$ все члены первого порядка относительно Ω обращаются в нуль. Второй член в правой части равен нулю, потому что при $m = 0$ величина ξ чисто вещественная. Таким образом, с точностью до членов первого порядка относительно Ω вращение не оказывает никакого влияния на частоту колебаний в случае произвольного осесимметричного возмущения (как частный случай сюда входят и квазирадиальные ко-

ления). При таких возмущениях только члены второго и более высоких порядков по Ω как-то влияют на частоты колебаний.

Отметим далее, что в правой части уравнения (19.17) все члены первого порядка по Ω чисто вещественные. Второй член вещественный потому, что величина $\xi^* \cdot (\Omega \times \xi)$, как легко показать, чисто мнимая. Можно показать также, что и все члены второго порядка по Ω в правой части (19.17) чисто вещественные. Таким образом, справедливо утверждение, что поправки на вращение к собственной частоте имеют осцилляторный характер (т.е. являются вещественными), по крайней мере с точностью до членов $O(\Omega^2)$ включительно.

Вещественность σ' [с точностью до членов $O(\Omega^2)$] позволяет дать интересную интерпретацию колебательной конвекции с нарастающей амплитудой. Если величина σ_0 в разложении $\omega = \sigma_0 + \sigma'$ чисто мнимая (что соответствует динамической неустойчивости невращающейся звезды), то, значит, величина ω комплексная, что соответствует либо нарастающим, либо затухающим колебаниям. Как было указано в гл. 17, динамически неустойчивые g -моды тесно связаны с конвекцией; более того, такая динамическая неустойчивость обычно интерпретируется как конвективная неустойчивость. Следовательно, σ_0 определяет характерное время развития (или затухания) таких движений, которые в невращающейся звезде были бы обычной конвекцией, а во вращающейся звезде представляют собой колебательную конвекцию с нарастающей амплитудой. Это характерное время определяется прежде всего свойствами конвективно неустойчивой области и по существу не зависит (во всяком случае, непосредственно) от периода вращения звезды. С другой стороны, период колебаний для такой колебательной конвекции определяется только величиной σ' , которая в свою очередь зависит только от скорости вращения и от внутреннего строения звезды.

С физической точки зрения колебательный характер рассматриваемых движений является непосредственным отражением того, что сила Кориолиса $\propto -\Omega \times \mathbf{v}_0$. Так, например, динамически неустойчивый поднимающийся или опускающийся элемент вещества испытывает вследствие вращения звезды действие силы Кориолиса, которая заставляет его отклоняться в сторону, в результате чего он движется с определенной периодичностью вдоль кольцеобразной траектории, а не просто вверх или вниз.

В работе [257] было рассчитано (с точностью до членов первого порядка относительно Ω) расщепление частот нерадиальных колебаний звезд с медленным дифференциальным вращением. Составляющие вектора ξ в сферических координатах, т.е. ξ_r , ξ_θ и ξ_ϕ обычно записывают через две функции $a(r)$ и $b(r)$, зависящие только от r и определенные в [345, §82]. (Эти a и b не следует смешивать с a и b из п. 19.16.) Они пропорциональны соответственно радиальной и тангенциальной составляющим вектора ξ (разд. 17.3). Кроме того, $a(r)$ и $b(r)$ — это решения приведенных в разд. 17.5 обыкновенных дифференциальных уравнений адиабатических нерадиальных колебаний статической сферической звезды. Если по всей звезде $\Omega = \text{const}$, то можно показать, что в инерциальной системе координат

$$\sigma' = -m\Omega(1 - C), \quad (19.18)$$

где

$$C = \int_0^R \rho r^2 (2ab + b^2) dr / \int_0^R \rho r^2 [a^2 + l(l+1)b^2] dr. \quad (19.19)$$

Ясно, что C зависит от внутреннего строения звезды и от свойств ее аднабатических колебаний; обычно $C < 1$. Тогда из уравнения (19.18) следует, что, например, те моды неаднабатических колебаний, которые соответствуют волнам, распространяющимся в направлении увеличения азимутального угла (т.е. моды с $m < 0$ или моды с «прямым» движением, совпадающим с направлением вращения), имеют при наличии вращения несколько более высокие частоты (меньшие периоды), чем без вращения. (Данный результат отчасти связан с тем, что σ' — это возмущение угловой частоты, рассматриваемое в инерциальной системе отсчета. В системе координат, вращающейся с угловой скоростью Ω , возмущение угловой частоты было бы равным $\sigma' + m\Omega = m\Omega C$; следовательно, моды с прямым движением, т.е. с $m < 0$, имели бы в этой системе координат меньшие частоты, чем моды с обратным движением.)

Интересно отметить, что, согласно [53], для g -мод в белых карликах $|a(r)| \ll |b(r)|$, и поэтому для таких колебаний, как следует из выражения (19.19), $C \approx 1/[l(l+1)]$. А тогда можно показать, что во вращающейся системе координат поправка вследствие вращения к фазовой скорости азимутальной бегущей волны неаднабатических колебаний белого карлика будет равна приблизительно $-\Omega/[l(l+1)]$ [625].

19.1г. ВЛИЯНИЕ НЕАДИАБАТИЧНОСТИ

Неаднабатические колебания вращающихся звезд изучены очень плохо. Пожалуй, некоторый интерес в этой связи представляет работа Айзема и Кокса [7], которые для звезды с произвольным установившимся вращением получили формальное решение линеаризованных уравнений неаднабатических колебаний, т.е. определили коэффициент устойчивости χ (см. гл. 9 и 16). Интересно, что в результирующее выражение для χ входят несколько членов, связанных с нарушением теплового равновесия (разд. 19.4). Но в конце концов этот вывод не должен нас удивлять, поскольку, как мы уже указывали, вращающаяся звезда не может находиться в тепловом равновесии.

По-видимому, наиболее важным результатом рассматриваемой работы является то, что основной вклад в коэффициент χ все еще вносит, как правильно, обычный интеграл C (разд. 16.2). (Это C не следует путать с C из п. 19.1в.) Точнее, Айзема и Кокс получили следующее выражение для коэффициента устойчивости χ :

$$-\chi = C_r/2K + \text{члены, связанные с нарушением теплового равновесия}, \quad (19.20)$$

где C_r — вещественная часть интеграла C [см. уравнение (16.21)], а K — некоторая величина, определенная в [7] и пропорциональная полной кинетической энергии вращающейся пульсирующей звезды. Айзема и Кокс показали, что соотношение (8.54) сохраняет заключенный в нем относительно простой фи-

зический смысл также для такой пульсирующей системы, которая в невозмущенном (неосциллирующем) состоянии характеризуется произвольными, но установившимися внутренними движениями.

Чтобы иметь хоть какое-то представление об устойчивости расщепленных вращением подуровней нерадиальных колебаний, Хансен, Кокс и Кэррол [255] исследовали вибрационную устойчивость этих подуровней в квазиадиабатическом приближении, считая вращение настолько медленным, что можно пренебречь несферичностью звезды. Для упрощения вычислений авторы использовали приближение Каулинга (разд. 17.9). Кроме того, они учли некоторые результаты Айземана и Кокса [7]. Основной вывод работы в применении к звездам спектрального класса В главной последовательности и к белым карликам состоит в том, что моды с прямым движением ($m < 0$) всегда несколько менее устойчивы, чем моды с обратным движением ($m > 0$).

Ряд попыток определить влияние некоторых эффектов медленного вращения на неадиабатические нерадиальные колебания описан в работе [476].

19.2. Влияние магнитных полей

На звездное вещество, пронизанное крупномасштабными магнитными полями, действуют не только обычные силы, такие, как гравитация, но и силы чисто электромагнитного происхождения.

Как и в случае вращающихся звезд, при наличии крупномасштабных магнитных полей исходная «статическая» модель, колебания которой предполагается исследовать, уже сама по себе оказывается в значительной степени неопределенной, и подобным моделям посвящен целый ряд работ (см., например, [60; 112; 159, 183; 337; 342; 345, §83; 371; 378 — 384; 467; 468; 486; 624; 630]). Согласно исследованиям Тейлера с сотрудниками [360, 361, 566, 567, 631], многочисленные конфигурации магнитного поля, предлагавшиеся в прошлом для магнитных звезд, могут быть подвержены влиянию локальных неустойчивостей.

Тем не менее существует ряд работ, посвященных колебаниям магнитных звезд. До сих пор все подобные исследования ограничивались анализом линейного адиабатического приближения, но даже в таком случае возникающие трудности очень велики. Хорошее обсуждение некоторых из этих проблем содержится в [345, §83]. Граничные условия также оказываются сложными (см., например, [526]). Многочисленные ссылки на исследования в данной области можно найти в обзорных статьях [133, 136]. В частности, см. [239—241, 243]. Изучалось влияние на звездные пульсации некоторых комбинированных эффектов вращения и магнитных полей [82].

Не вдаваясь в детали, отметим, что изученные частные случаи наводят на мысль, что в отличие от вращения, которое полностью снимает вырождение нерадиальных колебаний, магнитное поле снимает это вырождение лишь частично, т.е. при заданном значении l каждая частота расщепляется только на $(l + 1)$ подуровней с $|m| = 0, 1, \dots, l$.

Такое частичное снятие вырождения по m при наличии магнитного поля можно объяснить следующим образом. Нерадиальные колебания с $m \neq 0$ со-

ответствуют азимутальным бегущим волнам [ср. уравнение (17.36')], причем направление распространения волны зависит, очевидно, от знака m . При вращении направление распространения волны оказывается прямым или обратным, т.е. знак m имеет физический смысл. В присутствии магнитного поля, очевидно, нет никакого физического различия между $+m$ и $-m$, если испускающая система осесимметрична; т.е. существенна лишь абсолютная величина $|m|$. Поэтому в уравнения входит только $|m|$. Отметим также, что, как следует из анализа частных случаев, поправка к частоте колебаний, обусловленная наличием магнитного поля, по порядку величины составляет $|\sigma'_{\text{mag}}| \sim |\sigma_0| E_{\text{mag}}/E_{\text{grav}}$, где σ_0 — невозмущенная угловая частота (т.е. угловая частота при отсутствии магнитного поля); E_{mag} — полная магнитная энергия звезды, $E_{\text{mag}} \sim H^2 R^3$, где R — радиус звезды, а H — напряженность магнитного поля; наконец, E_{grav} — гравитационная энергия звезды, $E_{\text{grav}} \sim GM^2/R$.

Если принять $|\sigma'_{\text{rot}}| \sim |\Omega|$, где σ'_{rot} — возмущение угловой частоты вследствие вращения, то, согласно [257], условие $|\sigma'_{\text{mag}}| \ll |\sigma'_{\text{rot}}|$ можно по порядку величины выразить в следующем виде:

$$E_{\text{mag}} \ll (E_{\text{rot}} E_{\text{grav}})^{1/2}, \quad (19.21)$$

где E_{rot} — кинетическая энергия вращения, $E_{\text{rot}} \sim MR^2\Omega^2$. В [257] указано, что расщепление вследствие магнитных полей, вероятно, много меньше расщепления вследствие вращения, если только магнитные поля не являются очень сильными, скажем порядка 10^5 Гс для звезд верхней части главной последовательности или порядка 10^{10} Гс для остывающих белых карликов, причем в обеих этих оценках использованы типичные для указанных групп звезд значения параметров.

19.3. Влияние конвекции

При рассмотрении влияния конвекции на пульсации звезд обычно выделяют два главных аспекта. Во-первых, конвекция может влиять на внутреннее строение невозмущенной, или статической, звезды, а во-вторых, она может оказывать более или менее непосредственное влияние на сами пульсации. Такое разделение эффектов конвекции на две части правомерно, если пульсации малы, т.е. если они рассматриваются лишь как некоторое возмущение статической звезды. Однако в случае пульсаций с конечной амплитудой не ясно, оправдано ли такое умозрительное разделение эффектов (см. ниже).

Первый из этих эффектов — влияние на статическую модель — обычно исследуют с помощью теории длины перемешивания в той или иной формулировке, например [610] или [49] (см. также [146. Ch. 14; 245]), или с помощью некоторой модификации этой теории (например, [419, 539, 583 — 585, 587]; см. также [396, 397]). Такие статические модели как исходные модели пульсирующих звезд были построены, например, в работах [37, 103, 104, 122, 263, 281, 477, 582]. При рассмотрении пульсаций подобных моделей вариациями конвективного потока обычно либо совсем пренебрегают (как практически во всех цитированных работах), либо учитывают их каким-то сильно упрощен-

ным способом (как предложено, например, в [117]). Влияние конвекции на строение статической звезды было принято во внимание, чтобы объяснить ряд свойств некоторых типов пульсирующих звезд (в частности, массы «цефеид с бинарами»; см. обзор [138]).

В работах [65, 244, 246, 589] (см. также [224, 540, 541, 583 — 585, 587, 627]) было сделано несколько попыток сформулировать теорию неустойчивости звездной конвекции. Однако большинство этих попыток основывалось на той или иной модификации теории длины перемешивания и ее неизбежных допущениях.

Основательно подошел к проблеме неустойчивости конвекции Дюпри [174 — 182]. Он численно решил нелинейные уравнения неразрывности, импульса и энергии в конвективно неустойчивой области, считая зависящие переменные функциями времени и двух пространственных координат. Из-за недостатка машинного времени ему удалось проследить движение только самых больших конвективных ячеек. Введя коэффициент турбулентной вязкости, Дюпри исследовал распад этих больших ячеек на меньшие и последующий турбулентный каскад, который в конце концов диссипирует в тепло. Пожалуй, наиболее существенное предположение в работах Дюпри — это то, что конвекцию можно адекватно описать в пространстве двух измерений (реальное пространство трехмерно). Но даже в таком приближении вычисления очень трудоемки. Тем не менее в основном расчеты могут быть физически правильными, и они, возможно, действительно дали нам первое физическое объяснение того, каким образом конвекция может обеспечить возврат к устойчивости на красной границе полосы неустойчивости цефеид.

Широко распространено мнение, что именно существование конвекции в звездной оболочке приводит к прекращению пульсаций на красной (низкотемпературной) границе полосы неустойчивости, как предположили Бейкер и Киппенхайн [37] и др. Связь между конвекцией в оболочке и положением красной границы полосы неустойчивости цефеид была рассмотрена Бем-Вентзе и Нельсоном [50] на основе теории длины перемешивания. Бейкер и Гаф [33] определили положение красной границы полосы неустойчивости с помощью некоторой модификации этой теории. Однако расчеты Дюпри дали положение красной границы по крайней мере для переменных типа RR Лир, а по видимому, и для цефеид, без всякого привлечения феноменологических теорий конвекции, например теории длины перемешивания. Хотя ряд особенностей работы Дюпри можно подвергнуть критике (и, вероятно, не без оснований), тем не менее мы имеем в данном случае пример расчета теоретической красной границы, которая находится в разумном согласии с наблюдениями. Дюпри [179 — 181] исследовал зависимость положения этой расчетной красной границы от различных факторов, таких, как светимость, химический состав и обертоновые пульсации. Расчет положения красной границы, выполненный Бейкером и Гафом [34] на основе теории Гафа [246], по существу согласуется с результатами Дюпри.

Из работ Дюпри вырисовывается физическая картина того, как конвекция может приводить к прекращению пульсаций на красной границе полосы неустойчивости. Дюпри установил, что конвективный поток тепла максимален

приблизительно в момент максимального сжатия конвективных областей (т.е. примерно тогда, когда радиус звезды минимален). Следовательно, в этой фазе колебания конвекция (наиболее эффективная в зоне ионизации водорода) вызывает отток энергии, задерживаемой совместным действием α - и γ -механизмов в зоне второй ионизации гелия (гл. 10). Таким образом, конвекция фактически подавляет раскачивающие эффекты зоны (или зон) ионизации. Согласно Дюпри, достаточно уже довольно слабой конвекции, чтобы подавить пульсации на красной границе полосы неустойчивости.

Вне сомнения, такая физическая картина представляется разумной и остается ждать, подтвердят ли дальнейшие расчеты ее правильность и полноту.

Условное разделение эффектов конвекции, описанное в начале данного раздела, а именно рассмотрение влияния конвекции на статическую модель отдельно от ее непосредственного влияния на сами пульсации, в подходе Дюпри в явном виде нигде не встречается. Более того, Дюпри нашел, что существует довольно сильное взаимодействие конвекции и пульсаций в том смысле, что эти явления, по-видимому, подавляют друг друга: пульсации препятствуют установлению эффективной конвекции, тогда как конвекция стремится подавить пульсации.

Эта особенность взаимосвязи конвекции и пульсаций позволила Дюпри [179] сделать вывод, что конвекция не должна иметь существенного значения для звезд в полосе неустойчивости, за исключением очень близких окрестностей красной границы. А тогда можно прийти к заключению, что детали кривых блеска и т.п., рассчитанных с использованием чисто лучистых моделей, практически не должны быть подвержены влиянию конвекции. Как уже отмечалось, именно такой вывод следует из работы Кастора [66], посвященной фазовому запаздыванию и описанной в гл. 11.

19.4. Влияние отсутствия теплового равновесия

Строение реальной статической звезды в общем случае изменяется со временем. Это обусловлено тем, что звезды эволюционируют (гл. 4), и вопрос заключается лишь в скорости изменения статического состояния. Для большинства задач теории звездных пульсаций эта скорость так мала по сравнению со скоростями, связанными с пульсациями, что статическое состояние звезды можно с высокой точностью считать не меняющимся со временем. Это обычное приближение теории звездных пульсаций, и оно использовалось во всех разделах настоящей книги.

Обычно изменение статического состояния звезды происходит относительно медленно, с кельвиновским или ядерным характерным временем. Однако в некоторых случаях статическая модель может изменяться довольно быстро. Примерами могут служить сравнительно поздние стадии эволюции, например, звезд, испытывающих быстрые тепловые изменения различного вида (например, гелиевую вспышку, происходящую при загорании гелия в вырожденном ядре звезды с относительно малой массой порядка $1 M_{\odot}$, см., например, [259]; или довольно быстрое загорание гелия в тонком слоевом источнике, см., например, [232]).

По этим причинам полезно знать, будут ли медленные изменения статической модели иметь значение для вибрационных характеристик модели, и если они действительно окажутся важными, то как рассчитать их влияние. Такие медленные изменения статической модели обычно называют эффектами отсутствия теплового равновесия, поскольку они возникают всякий раз, когда $\varepsilon - (\nabla \cdot \mathbf{F})/\rho \neq 0$, где ε — полная интенсивность генерации термоядерной энергии на единицу массы, \mathbf{F} — полный поток энергии, а ρ — плотность [поскольку звезда эволюционирует (гл. 4), она никогда не может точно находиться в состоянии теплового равновесия]. Хотя имеющиеся результаты (см. ниже) свидетельствуют о том, что эффекты отсутствия теплового равновесия обычно малы по сравнению с другими эффектами, но все же теория звездных пульсаций была бы неполной, если бы такие эффекты нельзя было учесть хотя бы в принципе.

По-видимому, первой работой на эту тему было исследование Томаса [571], описанное в [335, §13, р. 648]. Был использован подход, основанный на рассмотрении полной энергии звезды, определенной как сумма кинетической, тепловой и гравитационной энергий и названной Леду [335], динамической энергией.

Исходя из такого уравнения энергии, Като и Унно [295] исследовали проблему радиальных пульсаций звезды, не находящейся в тепловом равновесии. Затем Окамото [398] проанализировал некоторые из полученных результатов и применил их к звездам, находящимся в стадии гравитационного сжатия к главной последовательности. Он нашел, что эффекты отсутствия теплового равновесия иногда оказываются важными.

Позже эту проблему исследовал Саймон [512, 513]. Саймон и Шастри [520] применили полученные результаты к некоторым модам высокого порядка, рассмотрев сильно проэволюционировавшие модели звезд. Аксель и Перкинз [23] также исходили из уравнения энергии. Унно [589, 590] подошел к проблеме с точки зрения общего вариационного принципа, а Дейви [154] рассмотрел ее для некоторого частного случая, без помощи уравнения энергии.

Однако «энергетические» методы решения данной задачи подверглись критике со стороны Кокса, Хансена и Дейви [148] на том основании, что эти методы являются потенциальными источниками неопределенностей. Например, как было показано в гл. 4, для звезды возможно уравнение энергии по меньшей мере в двух формах: одна основана на полной энергии, определенной выше, в другой используется сумма только кинетической и гравитационной энергий. В [148] указано, что первое из этих уравнений приводит к появлению величин собственно второго порядка малости (т.е. квадратов малых величин), что, по-видимому, еще больше усложняет проблему. С другой стороны, при использовании второго уравнения члены собственно второго порядка не появляются, встречаются только произведения величин первого порядка. Кроме того, в [148] были высказаны возражения и относительно применения для решения данной задачи (практически во всех исследованиях) квазиадиабатического приближения.

Затем Кокс, Хансен и Дейви [148] вывели общее линеаризованное неадиабатическое уравнение движения для радиальных пульсаций термически нерав-

новесной звезды. Уравнение имеет третий порядок по времени и при его выводе предполагалось, что «статическая», или невозмущенная, модель явно зависит от времени. Временная зависимость, принятая для пульсационных величин, описывалась следующим образом (на примере выражения для $\delta r/r_0$):

$$\delta r/r_0 = \xi(m, t) = \xi(m, t) \exp \left(\int_0^t \omega(t') dt' \right), \quad (19.22)$$

где индекс 0 соответствует «статическому» значению величины, а m — лагранжева массовая переменная. Амплитуда $\xi(m, t)$ и собственная частота $\omega(t)$ рассматривались как функции времени, потому что по предположению статическая модель изменяется со временем (хотя и медленно). Авторы предположили также, что $t_s/t_{ff} \gg 1$, где t_s — характерное время медленных эволюционных изменений статической модели, соответствующее по порядку величины кельвиновскому или ядерному времени (гл. 2), а t_{ff} — время свободного падения (гл. 2), которое обычно порядка периода пульсаций P . (Сделанное предположение будет кратко проанализировано ниже.) Используя затем метод, описанный в [336] (см. также гл. 9) и [146, ch. 27], авторы получили с точностью до $O(t_{ff}/t_s)$ интегральные выражения для частоты ω , записанной в виде

$$\omega = i\sigma - \kappa_1. \quad (19.23)$$

Здесь σ — угловая частота колебаний, не подверженная (с указанной точностью) влиянию эффектов отсутствия теплового равновесия, а κ_1 — коэффициент устойчивости (гл. 9), причем индекс 1 означает, что этот коэффициент устойчивости связан с относительной амплитудой пульсаций $\delta r/r_0$. Интегральные выражения включают в себя довольно сложные интегралы по всей массе звезды от величин, характеризующих статическую модель, и от их производных по времени, умноженных на коэффициенты, квадратичные относительно собственных функций пульсирующей модели, причем эти собственные функции (строго говоря, неизвестные) являются в принципе решениями линеаризованного неадиабатического уравнения движения (аналогичные интегральные выражения были приведены в гл. 9).

Один из простейших из всех возможных случаев — адиабатические пульсации ($\delta P/P_0 = \Gamma_{1,0} \delta \rho/\rho_0$) однородной модели (т.е. модели с одинаковой по всему объему плотностью), испытывающей медленное гомологическое сжатие, при котором $r_0^{-1} \partial r_0 / \partial t$ зависит только от времени, где r_0 — лагранжева пространственная координата; пульсации также считаются гомологическими, т.е. ξ постоянно в пространстве и во времени. Для этого случая часть коэффициента κ_1 , связанная с отсутствием теплового равновесия, составляет

$$-(6\Gamma_{1,0} - 5)/\tau, \quad (19.24)$$

где $\tau^{-1} = -R_0^{-1} dR_0/dt$, R_0 — «равновесный» радиус статической модели, а показатель адиабаты $\Gamma_{1,0}$ считается постоянным в пространстве и во времени. Таким образом, для данного простого случая эффекты отсутствия тепло-

вого равновесия являются дестабилизирующими, если рассматривается сжатие звезды.

Дальнейшее обсуждение энергетических методов было проведено Дейви и Коксом [157], получившими явное выражение (точное до второго порядка малости) для скорости изменения суммы кинетической и гравитационной энергии звезды при отсутствии теплового равновесия. Как было установлено ранее [148], это уравнение не содержит никаких величин собственно второго порядка малости, в нем встречаются лишь произведения величин первого порядка. Кроме того, квазиadiaбатическое приближение здесь в явном виде не использовалось.

Было показано, что для рассматриваемой суммы энергий коэффициент устойчивости, скажем χ_E , основанный на упомянутом выражении, точно согласуется с результатами, полученными ранее в [295, 513, 520] с помощью энергетического подхода (в тех случаях, когда такое сравнение было возможным), но не согласуется ни с результатами использования метода малых возмущений Кокса, Хансена и Дейви [148], ни с результатами Унио [590].

Поэтому Дейви и Кокс [157] предложили «модифицированный» энергетический метод, основанный на средней скорости изменения одной лишь кинетической энергии, и показали, что такой подход приводит к точному согласию с результатами [148], полученными методом малых возмущений, по крайней мере для квазиadiaбатических пульсаций. Однако, как отметил Демаре [166], представленное в [157] доказательство эквивалентности результатов, полученных энергетическим методом и методом малых возмущений, было основано на недостаточно общей зависимости от времени, принятой для пульсационных величин. Демаре [166] пришел к правильному выводу, что для термически неравновесной звезды существуют, по крайней мере в принципе, два коэффициента устойчивости: один для амплитуды, а другой для полной энергии пульсаций. Кроме того, он показал, что оба эти коэффициента связаны между собой простым соотношением (см. ниже).

Дейви и Кокс [157] отметили также, что коэффициенты устойчивости для относительных вариаций $\delta r/r_0$ и для абсолютных вариаций δr (обозначенные соответственно χ_1 и χ_{II}) оказались различными. Например, в сжимающейся звезде относительная вариация, по-видимому, возрастает быстрее, чем абсолютная. Авторы привели доводы в пользу того, что коэффициент χ_{II} является более важным и имеет более глубокий физический смысл, чем χ_1 .

Для квазиadiaбатических гомологических колебаний однородной модели, испытывающей гомологическое сжатие при постоянном значении $\Gamma_{1,0}$, вклад в коэффициент χ_{II} , обусловленный отсутствием теплового равновесия, составляет

$$-(6\Gamma_{1,0} - 9)/4\tau, \quad (19.25)$$

где τ определено сразу после формулы (19.24).

Дальнейшее обсуждение метода малых возмущений провели Кокс, Дейви и Айземай [144]. В частности, было показано, что в выражении для коэффициента устойчивости термически неравновесных звезд можно с точностью до $O(t_{ff}/t_s)$ пренебречь интегралами, включающими в себя изменения амплитуды

ды пульсаций $\{\xi$ в формуле (19.22)] со временем. Было также отмечено, что предположение $t_{ff}/t_s \ll 1$ (см. выше), которое обычно делают при изучении термически неравновесных звезд, эквивалентно предположению квазиadiaбатических колебаний. Кроме того, было показано, что эти предположения практически всегда оправдываются для всех звезд, за исключением красных сверхгигантов малой массы.

Упомянутая выше связь между κ_E и κ_{II} , как отметил Саймон [518], уже содержалась в работе [144]. Соотношение между двумя этими коэффициентами устойчивости таково:

$$\kappa_E = \kappa_{II} - (2J\Sigma^2)^{-1} d(J\Sigma^2)/dt,$$

где $J\Sigma^2$ определено в [148] [см. также уравнение (9.44)]. Как отмечено в [518], это выражение можно записать с точностью до $O(t_{ff}/t_s)$ в виде

$$\kappa_E = \kappa_{II} - (1/\sigma) d\sigma/dt. \quad (19.26)$$

Саймон [518] показал, что коэффициент устойчивости для скорости пульсаций идентичен κ_E . Таким образом, упоминавшиеся энергетические методы дают информацию о скорости пульсаций (а не об амплитуде смещения), а это дает то преимущество, что скорость измеряется более или менее непосредственно.

Саймон отметил также, что в некоторых случаях коэффициент устойчивости для скорости пульсаций указывал на неустойчивость, тогда как коэффициент для амплитуды смещения свидетельствовал об устойчивости; или же имело место обратное. Саймон обсудил проблему устойчивости в целом и дал более общее определение пульсационной устойчивости термически неравновесных звезд.

Дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее малые колебания звезды при отсутствии теплового равновесия, было непосредственно решено Айзенманом и Коксом [5] для нескольких простых случаев асимптотическими методами, разработанными советскими математиками (см. [48, 213, 314, 376]). Во всех изученных случаях было достигнуто точное согласие с результатами, полученными ранее с помощью интегральных выражений. Решения, основанные на этих асимптотических методах были независимо получены Демаре [164, 165].

Дейви [156] также рассмотрел проблему квазиadiaбатических радиальных колебаний термически неравновесных звезд исходя из дифференциального уравнения для амплитуды пульсаций. Он показал, что при $t_{ff}/t_s \ll 1$ функции, входящие в интегральные выражения, выведенные ранее в [144, 148], являются решениями линейного адиабатического волнового уравнения (гл. 8) без учета эффектов отсутствия теплового равновесия. В работах [144, 148] данный вывод фактически уже считался справедливым и был использован для получения некоторых численных результатов. Кроме того, с помощью разложений в степенной ряд (как в [465, гл. 3]) Дейви [156] удалось непосредственно решить это дифференциальное уравнение для нескольких случаев, изученных Айзенманом и Коксом [5] посредством более мощных, но и намного более сложных асимптотических методов. Во всех случаях, даже в

том, где имело место «медленное» негомологическое движение (когда величина $r_0^{-1} \partial r_0 / \partial t$ являлась функцией массовой переменной m , а также времени), было получено полное согласие результатов.

Шастри и Саймон [487] изучили влияние отсутствия теплового равновесия на некоторые радиальные моды модели звезды в состоянии, непосредственно предшествующем вспышке новой. Они использовали подход, основанный на рассмотрении динамической энергии, определенной выше. Кокс [134] исследовал влияние отсутствия теплового равновесия на пульсации термически неустойчивой звездной модели [232] со слоевым гелиевым источником методом малых возмущений, основанным на интегральных выражениях. В обоих случаях модели были далеки от теплового равновесия, а медленное движение было в значительной степени негомологическим. Эффекты отсутствия теплового равновесия оказались заметными, но меньшими, по крайней мере в работе [134], чем другие эффекты. В [487] учет этих эффектов привел к тому, что некоторые из мод, неустойчивых относительно малых возмущений, стали устойчивыми.

В работе Айземаи и Кокса [6] представлено общее физическое рассмотрение проблемы пульсаций термически неравновесных звезд. Эффекты отсутствия теплового равновесия были условно разделены на две части: «динамическую» и «неадиабатическую». Динамическая часть не содержит никаких неадиабатических членов, т.е. такие эффекты имели бы место даже при идеально адиабатических колебаниях. Соответствующий коэффициент устойчивости определяется следующим выражением:

$$\kappa_{\text{II, dyn}} = (1/2\omega) d\omega/dt = (1/2\sigma) d\sigma/dt, \quad (19.27)$$

где ω определено соотношением (19.23), а σ — мгновенная угловая частота колебаний. Последнее равенство в (19.27) выполняется с точностью до $O(t_{\text{ff}}/t_s)$. Рассмотренный вклад обусловлен только изменением масштаба в инерциальном члене уравнения импульса (для одномерного гармонического осциллятора это эквивалентно изменению с коэффициента упругой силы, см. [6]. — *Перев.*). Он был впервые выделен Уино [590]. Динамический член содержит в себе всю разность между коэффициентами устойчивости для относительных и абсолютных вариаций (см. выше).

Неадиабатическая часть обусловлена только неадиабатическими эффектами (т.е. приращениями и потерями тепла) и не зависит ни от каких эффектов, связанных с медленным изменением размеров статической модели. Этот член одинаков для относительных и абсолютных вариаций. Как показано в [6], данный вклад в коэффициент устойчивости является, как правило, дестабилизирующим в случае сжатия, и этот эффект легко объяснить физически посредством рассмотрения малых фазовых сдвигов между локальными вариациями давления δP и плотности $\delta \rho$ (гл. 9). Так, если некоторая область сжимается, то она обычно теряет тепло, и величина $(\epsilon - \partial L_r / \partial m)_0$ будет отрицательной. Эта локальная потеря тепла, вызванная отсутствием теплового равновесия в статической модели, для пульсирующей звезды эквивалентна некоторому источнику тепла и приводит к небольшому запаздыванию δP относительно $\delta \rho$, т.е. стремится усилить пульсации (гл. 9).

Условное разделение эффектов отсутствия теплового равновесия на две части было независимо выполнено Демаре [164, 165], назвавшим эти составляющие изотропной и неизотропной соответственно.

Айземан и Кокс [6] показали также, что с точностью до $O(t_{\text{ff}}/t_g)$ к нерадиальным колебаниям термически неравновесной звезды применимы те же самые соотношения, что и к ее радиальным колебаниям.

В важной работе Бачлера [57] проблема колебаний термически неравновесной звезды была рассмотрена с помощью метода двухмасштабных разложений, описанного в [107] (см. также разд. 13.4). Как отмечено в [57], преимуществом данного метода является, в частности, то, что здесь нет необходимости ограничиваться линейной теорией, как это имело место во всех предыдущих исследованиях.

Бачлер также пришел к выводу, что в согласии с [166, 518] [см. также обсуждение в связи с уравнением (19.26)] для термически неравновесной звезды существуют два различных коэффициента неустойчивости, которые иногда дают явно противоречивые результаты. Как уже говорилось, один из коэффициентов устойчивости основан на рассмотрении амплитуды пульсаций, а другой — на рассмотрении энергии пульсаций (или соответствующей скорости).

Бачлер [57] исследовал такую противоречивую природу обоих коэффициентов устойчивости и пришел к выводу, что подобная ситуация возникает из-за неправильной постановки задачи о вибрационной устойчивости термически неравновесных звезд. Это объясняется в основном трудностью определения средних по времени для тех величин, которые не являются строго периодическими. При выводе коэффициента устойчивости Бачлер предложил основываться на действии (на единицу массы), скажем, $I = \eta^2 \omega$, где η — амплитуда для δr . В качестве частичного обоснования своего предложения он показал, что I является адиабатическим инвариантом в том смысле, что при медленном изменении параметров звезды $dI/dt = 0$. Такая инвариантность I находится в полном согласии с вышеприведенным анализом динамического (или изотропного) вклада в коэффициент устойчивости. Это легко понять, поскольку если I не изменяется, то $\eta \propto \omega^{-1/2}$, а именно такая зависимость получается и при рассмотрении одного лишь динамического или изотропного вклада в коэффициент устойчивости [см. уравнение (19.27)].

Как отметил Бачлер [57], его предложение равносильно рассмотрению только неадиабатической или неизотропной части коэффициента устойчивости. Действительно, легко показать, что коэффициент устойчивости, основанный на действии I , идентичен $\chi_{\text{II, na}}$ — неадиабатической части коэффициента устойчивости для амплитуды измененного радиуса. Исходя из этого, мы можем привести здесь результат, полученный Айземаном и Коксом [6, Eq. (65)] для нерадиальных колебаний (радиальные колебания можно рассмотреть просто как частный случай, заменяя во всех уравнениях величину $(1/\rho) \nabla \cdot \mathbf{F}$ на $\partial L_r / \partial m$, где m — лагранжева массовая координата). Имеем

$$\chi_{\text{II, na}} = \frac{1}{2} (\sigma^2 J)^{-1} (-C_r + D + G_{1,r} + G_{3,r}), \quad (19.28)$$

где C_r — вещественная часть интеграла C [см. уравнение (16.21)], J — осцилляторный момент инерции [см. уравнение (16.19)], а D , G_1 и G_3 — довольно сложные интегралы, связанные с отсутствием теплового равновесия и определенные в [6]. При постоянных значениях показателей адиабаты Γ_i интегралы G_1 и G_3 обращаются в нуль; интеграл D становится равным нулю для звезды в тепловом равновесии. Можно показать, что для рассмотренного выше простого случая квазиадиабатических гомологических колебаний однородной модели, испытывающей медленное гомологическое сжатие при постоянных Γ_i , коэффициент $\kappa_{II, na}$ имеет следующий вид:

$$\kappa_{II, na} = -3(\Gamma_{1,0} - 1)/2\tau, \quad (19.29)$$

где τ определено сразу после уравнения (19.24).

Бачлер также отметил, как уже высказывалось ранее Саймоном [516], что звездные пульсации с достаточно большой амплитудой могут оказывать обратное влияние на статическое строение звезды и тем самым на ее эволюцию.

Наконец, Вемури [609] провел численное сравнение результатов нескольких предыдущих работ о вибрационной устойчивости термически неравновесных звезд. В целом существует прекрасное согласие между результатами, полученными различными методами, если в них принимались сходные предположения. Так, интересно отметить, что использованный в [487] энергетический метод, который основан на рассмотрении динамической энергии звезды и в котором появляются квадраты малых величин, привел к результатам, в значительной степени согласующимся с результатами применения другого энергетического метода [157, 166], в котором встречаются лишь парные произведения различных величин первого порядка малости. Вемури [609] подтвердил результаты Демаре [166] и Саймона [518] о том, что для термически неравновесных звезд имеются по меньшей мере два коэффициента устойчивости (см. выше) и что между этими коэффициентами существует простая связь [см. уравнение (19.26)].

19.5. Эффекты общей теории относительности

В большинстве задач теории звездных пульсаций эффектами общей теории относительности, к счастью, почти всегда можно пренебречь. Однако в некоторых случаях, таких, как пульсации нейтронных звезд или белых карликов (или для таких экстремальных моделей, как в [579]), эти эффекты действительно необходимо учитывать. Поскольку всюду в настоящей книге мы действовали в рамках ньютоновской теории тяготения, наши замечания об эффектах общей теории относительности будут весьма краткими.

Релятивистская теория внутреннего строения звезд была подробно рассмотрена в работах [375, 573, 577 — 579, 618, 635].

Чисто радиальные колебания не могут привести к генерации гравитационного излучения, учет которого сильно усложняет проблему. Поэтому релятивистская теория таких колебаний в линейном адиабатическом приближении уже довольно тщательно разработана. Термин «адиабатический» мы используем в классическом термодинамическом смысле, подразумевая отсутст-

ние теплообмена с окружающей средой, гл. 4.) Как впервые показал Чандрасекар [74—76], важное вариационное свойство, а также большинство других математических свойств таких колебаний для нерелятивистского случая (см. гл. 8) имеют близкие аналоги и в релятивистской теории (см., например, [41, 573]).

Очень интересный результат ряда вышеупомянутых исследований касается динамической устойчивости сферической звезды в общей теории относительности. Такая звезда может оказаться динамически неустойчивой под действием даже настолько слабых релятивистских эффектов, что они никак не влияют на ее строение в статическом состоянии. Если считать Γ_1 релятивистским обобщением соответствующего показателя адиабаты (см., например, [573, p. 282]), то критерий динамической устойчивости в общей теории относительности имеет, согласно [76], следующий вид:

$$\Gamma_1 - \frac{4}{3} > 2KGM/(c^2 R) = 4,24 \cdot 10^{-6} K(M/M_\odot)(R_\odot/R), \quad (19.30)$$

где K — безразмерное число, значение которого зависит от концентрации звездного вещества к центру и обычно составляет приблизительно от 0,5 до 1,5 (см. также [46, 47]). Бисноватый-Коган и Блинников [45] также обсудили проблему динамической устойчивости с учетом релятивистских эффектов и привели многочисленные библиографические ссылки. См. также работы [81, 262, 275].

Излучение гравитационных волн связывают с нерадиальными колебаниями при $l \geq 2$ (l — степень сферической гармоники $Y_l^m(\theta, \phi)$). Линейные адиабатические нерадиальные колебания в релятивистском приближении были рассмотрены в серии статей Торна с сотрудниками [62, 283, 393, 447, 574 — 576]; см. также [162, 496, 622]. Излучение гравитационных волн в моделях белых карликов было рассчитано Осаки и Хансеном [410]. Дэвис [160] рассмотрел влияние эффектов специальной теории относительности на лучистый перенос в звездах.

В работе [171] был найден вариационный принцип для линейных адиабатических нерадиальных колебаний жидких шаров в общей теории относительности. В [169, 170] этот вариационный принцип был применен к релятивистским моделям звезд для получения некоторой информации о свойствах их нерадиальных колебаний.

19.6. Вековая устойчивость

Проблема вековой устойчивости звезды связана с вопросом о том, будет ли звезда устойчивой относительно малых возмущений, налагаемых настолько медленно, что звезда в течение всего этого процесса остается в состоянии гидростатического равновесия (гл. 2). Таким образом, проблема вековой устойчивости связана с вопросом о том, будет ли звезда устойчива относительно малых отклонений от теплового равновесия. Следовательно, вековую устойчивость можно считать частным случаем пульсационной устойчивости. Уравнения, описывающие вековую устойчивость, можно вывести из уравнений для пульсационной устойчивости, если просто отбросить в них все дина-

мические члены (т.е. все члены, связанные с ускорениями). Соответствующее характерное время в проблеме вековой устойчивости является поэтому довольно большим, и можно ожидать, что существенные изменения в физической системе будут происходить с характерным временем порядка кельвинновского времени (гл. 2).

Вопросам вековой устойчивости посвящены многочисленные теоретические исследования, выполненные преимущественно в конце 60-х — начале 70-х годов. Недавно вышел в свет прекрасный обзор Хансена [252] на эту тему, в котором приведена обширная библиография, поэтому наше рассмотрение подобных вопросов будет очень кратким.

Практически во всех исследованиях предполагалось, что возмущения сферически симметричны, и если не оговорено особо, то мы тоже будем исходить из этого предположения. Лишь в нескольких работах рассматривались нерадиальные возмущения, см., например, [304, 463]. См. также очень четкое обсуждение проблемы в [305]*.

Вероятно, наиболее простой математически и наиболее полезный для понимания подход состоит в использовании интегральных выражений, аналогичных рассмотренным в разд. 9.3. Если предположить, что все возмущенные величины зависят от времени по закону $\exp[i\omega t]$, то соответствующим уравнением для собственных значений будет кубическое уравнение (9.43) и все входящие в него величины определены в разд. 9.3. Обозначая ω_1 вековой («малый») корень и принимая, что $|\omega_1|^2 \ll |\Sigma^2|$, приближенно получаем

$$\omega_1 = iC/(\Sigma^2 J). \quad (19.31)$$

Этот результат показывает, что движение будет апериодическим, если C чисто вещественно, причем если $C > 0$, то звезда будет устойчивой относительно вековых возмущений, поскольку, согласно разд. 8.11, для динамически устойчивой звезды ($\Gamma_1 > 1/2$, и мы рассматриваем только такой случай) всегда $\Sigma^2 J > 0$. (Используемый здесь символ C не следует смешивать с C из разд. 19.1.)

Как показал Хансен [252] (см. также [146, Ch. 27]), $|1/\omega_1| \sim t_K$, где t_K — кельвинновское время (гл. 2).

Кроме того, если движение является гомологическим (когда величина $\delta r/r$ по всей звезде одинакова), то из соотношения (19.31) легко получить обычный критерий Джинса [287]. Предполагая, что $\delta P/P$, $\delta x/x$ и $\delta \varepsilon/\varepsilon$ можно выразить через $\delta \rho/\rho$ и $\delta T/T$ с помощью простых соотношений типа (13.2), (13.3) [а также соотношения для $\delta \varepsilon/\varepsilon$, приведенного непосредственно перед (13.23)], легко представить интеграл C как функцию от n , s , λ , ν , χ_ρ и χ_T (все символы имеют обычный смысл), причем условием вековой устойчивости является неравенство $C > 0$. Тогда обобщенный критерий Джинса можно записать как

$$3\lambda + \nu(4 - 3\chi_\rho)/\chi_T > -4 - 3n + (s + 4)(4 - 3\chi_\rho)/\chi_T, \quad (19.32)$$

* В этот же круг вопросов попадает и проблема медленного перемешивания вещества в недрах звезд. Для Солнца эта проблема была исследована в [463], и оказалось, что оно устойчиво относительно такого перемешивания.

причем в случае идеального газа (когда $\chi_p = \chi_T = 1$) получаем обычный критерий Джинса $3\lambda + \nu > s - 3\lambda$. Например, при типичных значениях $\lambda = 1$, $s = 3$ и $\nu = 1$ критерий Джинса требует, чтобы $\nu > -3$, а это очень слабое условие.

Физический смысл обобщенного критерия Джинса состоит в следующем. Рассмотрим звезду, первоначально находившуюся в состоянии теплового равновесия, $L = \int_M \varepsilon dm$. Предположим, что она испытала гомологическое

сжатие на малую относительную величину $(-\xi) (= \text{const})$. Тогда относительное усиление термоядерного энерговыделения $\delta\varepsilon/\varepsilon$ определится левой частью неравенства (19.32), умноженной на $(-\xi)$. Умножение на $(-\xi)$ правой части соответствует относительному увеличению светимости звезды $\delta L/L$. Если условие Джинса (19.32) выполняется, то $\delta\varepsilon/\varepsilon > \delta L/L$, т.е. звезда накапливает тепло. Следовательно, полная энергия звезды E (сумма тепловой и гравитационной) должна возрасть. Поскольку по теореме вириала (гл. 2) $E = \text{const} \times (\text{гравитационная энергия}) < 0$, возрастание E означает увеличение радиуса звезды R , что противоположно направлению первоначального возмущения, так как мы рассматривали сжатие звезды (т.е. уменьшение R).

Описанную последовательность событий можно интерпретировать и через внутреннюю температуру звезды. Поскольку при гомологических изменениях температура изменяется, как правило, обратно пропорционально некоторой степени R (первой степени, если используется уравнение состояния идеального газа), то увеличение R означает уменьшение внутренней температуры. Следовательно, в рассматриваемом случае, когда звезда устойчива относительно вековых возмущений, можно сказать, что приращение тепла, сопровождающее первоначальное сжатие, заставляет звезду расширяться и охлаждаться, т.е. стремится вернуть ее в исходное состояние.

Реальная ситуация оказывается значительно более сложной, и в поведении звезды во времени часто присутствует компонент, связанный с колебаниями, что более полно описано в обзоре [252]. Кроме того, для звезд, находящихся на таких эволюционных стадиях, когда их внутреннее строение уже само изменяется примерно с кельвиновским характерным временем, точная интерпретация и смысл вековой устойчивости неясны.

19.7. Общее значение теории звездных пульсаций

Пожалуй, основное значение теории звездных пульсаций заключается в том, что она дает нам, по крайней мере в принципе, дополнительную возможность «зондирования» звездных недр. Очевидно, что характер колебаний звезды зависит от ее внутреннего строения, а также, вероятно, от других факторов, таких, как вращение, магнитное поле и т.д. Поэтому из наблюдений звездных пульсаций можно надеяться больше узнать о внутреннем строении звезд (а может быть, получить и другие сведения) в дополнение к данным, вытекающим из рассмотрения только статических характеристик звезд.

Хорошим примером подобного применения теории пульсаций является предложение Кристеисеи-Далсгаарда и Гафа [89] использовать наблюдения

малых колебаний Солища (см. ссылки в [89], а также [268, 270]) для изучения солнечных недр подобно тому, как информация о сейсмических колебаниях используется для исследования земных недр.

Фактически теория радиальных пульсаций уже много лет применяется в приложении к цефеидам и родственным типам переменных звезд (гл. 3). Например, как отмечено в гл. 8, для основной моды радиальных колебаний звезды с $\Gamma_1 = \frac{1}{2}$ пульсационная постоянная Q в соотношении период — средняя плотность должна подчиняться условию $Q \leq 0,116^d$, где верхний предел относится к однородной модели ($\rho = \text{const}$ по всему объему). Для довольно реалистичных моделей с заметной концентрацией вещества к центру характерным значением является $Q \approx 0,04^d$, а более точное значение зависит от деталей строения звезды. Экспериментальные данные согласуются с предсказываемыми значениями, и это дает некоторую уверенность в том, что нам известны правильные значения по крайней мере нескольких основных параметров цефеид. [Интересно однако заметить, что еще в 1932 г., за 20 лет до того, как Бааде [26] провел ревизию нуль-пункта зависимости период — светимость для цефеид (история вопроса хорошо изложена в [210], см. также [28]), Эддингтон [198] отмечал, что в данных о цефеидах содержится какая-то ошибка. Имевшиеся в то время данные наблюдений указывали на значения Q , близкие к верхнему пределу. Исходя из этого, Эддингтон сделал вывод, что цефеиды должны быть более однородными по плотности, чем другие звезды. Новый нуль-пункт привел к увеличению светимости цефеид приблизительно в 4 раза, т.е. при заданных показателях цвета или эффективной температуре радиусы увеличивались вдвое по сравнению с предыдущими оценками. Большие радиусы означают меньшие средние плотности, а значит, более низкие Q , что согласуется с теоретическими предсказаниями.]

В настоящее время одной из трудностей представляется «проблема масс цефеид», и она особенно серьезна для цефеид с бинарными (или двупериодическими цефеид). Эта проблема обсуждена в двух обзорных статьях [116, 138], см. также [124, 139], где приведена обширная библиография. Вкратце применение теории радиальных пульсаций к цефеидам дает массы, которые, возможно, на 20 — 40% меньше значений, предсказываемых эволюционными расчетами. У цефеид с бинарными «пульсационные» массы в 2 — 3 раза меньше «эволюционных». Причина расхождения этих оценок в настоящее время не известна, но если она будет понята, то это, вероятно, может дать новые сведения о пульсациях звезд и о других звездных параметрах (см., например, [114, 115, 124]). В любом случае эта трудность демонстрирует нам, что теория пульсаций может, по-видимому, служить источником новой информации о звездах.

Что касается нерадиальных колебаний, то недавние наблюдения и теоретические исследования показывают, что такие колебания могут быть весьма распространенным явлением во многих типах звезд. Например, наблюдения Мак-Гро [363] (см. также [392, 456 — 458]) наводят на мысль о существовании нового класса переменных — звезд «типа ZZ Кита». Полагают, что эти звезды — обычные белые карлики с эффективными температурами около 10^4 К.

Как предположил Мак-Гро [363], изменения блеска могут быть следствием гравитационных колебаний (g -мод) высокого порядка.

Еще одним примером служат более или менее периодические изменения профилей линий в спектрах звезд спектрального класса В, наблюдавшиеся Смитом [531] и Смитом и Мак-Коллом [537] (см. также [59, 533, 536]). Смит пришел к выводу, что эти изменения можно объяснить только иерардиальными колебаниями, и в большинстве случаев удается даже провести предварительное отождествление мод колебаний. Смит назвал эти звезды «звездами класса В с переменными профилями линий» или «звездами типа 53 Персея», и они также могут представлять собой новый класс переменных звезд.

Конечно, для интерпретации наблюдений звездной переменности с помощью иерардиальных колебаний необходимо иметь некоторое представление о самой теории.

Смит [531] высказал также предположение, что звезды типа β Цефея (гл. 3) и звезды класса В с переменными профилями линий могут быть родственными друг другу (п. 3.2в). До сих пор ни причина (или причины), ни природа переменности звезд типа β Цефея не известны (обзор проблемы дан в [137, 294]; более свежие результаты представлены в [152, 474, 533, 549]).

Как предположили Люси [354], Осаки [409] и Дзембовски [190], иерардиальные колебания очень высокого порядка могут быть довольно распространены в горячих звездах очень высокой светимости, поскольку модели подобных звезд часто оказываются неустойчивыми относительно таких возмущений. В наблюдениях иерардиальные колебания высокого порядка могут обнаруживаться как макро- или микротурбулентность — природа этих явлений долгое время оставалась неизвестной. Кроме того, такие колебания могут играть некоторую роль в нагреве звездных хромосфер и корон.

Наконец, можно ожидать, что теория иерардиальных колебаний будет иметь фундаментальное значение для интерпретации колебаний объектов, которые в принципе не являются сферически симметричными. Примерами могут служить объекты, в которых имеется четко выделенное направление, например вращающаяся звезда или диск. Другой пример — звезда, пронизанная крупномасштабным магнитным полем. Вероятно, колебания карликовых novae после вспышек [455] можно отнести к быстро вращающемуся аккреционному диску [423]. (Однако см. [551].) Было показано, что вертикальные неосимметричные колебания аккреционных дисков вокруг белых карликов действительно имеют периоды в наблюдаемом диапазоне [606].

ЛИТЕРАТУРА

Числа в скобках указывают номера глав или разделов, в которых цитируется данная работа.

1. *Abt H. A.* *Astrophys. J.*, **126**, 138, 1957. (18.3)
2. *Abt H. A.* *Astrophys. J.*, **130**, 769, 1959. (3.1)
3. *Adams T. F., Castor J. I.* *Astrophys. J.*, **230**, 826, 1979. (11.3)
4. *Adams T. F., Davis C. G., Keller C. F.* Los Alamos Report LA-7598-MS, 1978. (12.2)
5. *Aizenman M. L., Cox J. P.* *Astrophys. J.*, **194**, 663, 1974. (9.3, 19.4)
6. *Aizenman M. L., Cox J. P.* *Astrophys. J.*, **195**, 175, 1975. (19.4)
7. *Aizenman M. L., Cox J. P.* *Astrophys. J.*, **202**, 137, 1975. (19.1r)
8. *Aizenman M. L., Cox J. P., Lesh J. R.* *Astrophys. J.*, **197**, 399, 1975. (17.10)
9. *Aizenman M. L., Hansen C. J., Ross R. R.* *Astrophys. J.*, **201**, 387, 1975. (17.8)
10. *Aizenman M. L., Perdan J.* *Astron. Astrophys.*, **15**, 200, 1971. (5.1)
11. *Aizenman M. L., Perdan J.* *Astron. Astrophys.*, **17**, 190, 1972. (5.1)
12. *Aizenman M. L., Smeyers P.* *Astrophys. Space Sci.*, **48**, 123, 1977. (17.3, 18)
13. *Aizenman M. L., Smeyers P., Weigert A.* *Astron. Astrophys.*, **58**, 41, 1977. (17.8, 17.10)
14. Алешин В. И. *Астроном. ж.*, **41**, 201, 1964. (12.2)
15. *Alfvén H., Fälthammar C. G.* *Cosmical Electrodynamics*, Clarendon Press, Oxford, 2nd ed., 1963. [Имеется перевод: Альвен Г., Фельтхаммар К. Космическая электродинамика. — М.: Мир, 1967.] (4.6)
16. *Aller L. H.* *Astrophysics: The Atmospheres of the Sun and Stars*, 2nd ed., Ronald Press, New York, 1963. [Имеется перевод: Аллер Л. Астрофизика. Т. I. Атмосферы Солнца и звезд. — М.: ИЛ, 1955.] (3)
17. *Aller L. H., McLaughlin D. B., eds.*, *Stellar Structure*, University of Chicago Press, Chicago, 1965. [Имеется перевод: Внутреннее строение звезд/ Под ред. Л. Аллера и Д. Мак-Лафлина. — М.: Мир, 1970.]
18. *Ando H.* *Publ. Astron. Soc. Japan*, **28**, 517, 1976. (17.10, 18.3)
19. *Ando H., Osaki Y.* *Publ. Astron. Soc. Japan*, **27**, 581, 1975. (17.66, 17.10, 17.14, 18.1, 18.3)
20. *Ando H., Osaki Y.* *Publ. Astron. Soc. Japan*, **29**, 221, 1977. (18.3)
21. *Andrew A. L.* *Australian J. Phys.*, **20**, 363, 1967. (17.12)
22. *Auré J. L.* *Astron. Astrophys.*, **11**, 345, 1971. (18.3)
23. *Axel L., Perkins F.* *Astrophys. J.*, **163**, 29, 1971. (8.5, 19.4)
24. *Ayres T. R., Linsky J. L., Shine R. A.* *Astrophys. J. (Letters)*, **195**, L121, 1975. (18.3)
25. *Baade W.* *Astron. Nachr.*, **228**, 359, 1926. (3.3)
26. *Baade W.* *Trans. IAU*, **8**, 397, 1952. (19.7)
27. *Baade W.* *Publ. Astron. Soc. Pacific*, **68**, 5, 1956. (3.1)
28. *Baade W.* *Evolution of Stars and Galaxies*, ed. Payne-Gaposchkin C., Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1963. [Имеется перевод: Бааде В. Эволюция звезд и галактик. — М.: Мир, 1966.] (3.1, 19.7)

29. *Bahcall J. N.* Astrophys. J. (Letters), **216**, L115, 1977. (18.3)
30. *Bahcall J. N., Sears R. L.* Ann. Rev. Astron. Astrophys., **10**, 25, 1972. (18.3)
31. *Baker N.* In Stellar Evolution, eds. Stein R. F., Cameron A. G. W., Plenum Press, New York, 1966, p. 333. (13, 13.1, 13.3)
32. *Baker N.* In Stellar Evolution, eds. Chiu H.-Y., Muriel A., MIT Press, Cambridge, Mass., 1972, p. 155. (12.2)
33. *Baker N., Gough D. O.* Astron. J., **72**, 784, 1967. (19.3)
34. *Baker N., Gough D. O.* Astrophys. J., **234**, 232, 1979. (10.1, 19.3)
35. *Baker N., Kippenhahn R. Z.* Astrophys., **48**, 140, 1959. (19.1a)
36. *Baker N., Kippenhahn R. Z.* Astrophys., **54**, 114, 1962. (9.2a, 9.26, 10.1, 10.2, 11.1, 18.3)
37. *Baker N., Kippenhahn R.* Astrophys. J., **142**, 868, 1965. (8.4, 9.26, 10.1, 10.2, 11.1, 11.4, 19.3)
38. *Baker N., von Sengbusch K.* Mitteilungen Astron. Gesellschaft, No. 27, S. 162, 1969. (12.2)
39. *Baker N., von Sengbusch K.* Bull. Amer. Astron. Soc., **2**, 181, 1970. (12.2)
40. *Balona J. M., Stobie R. S.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **187**, 217, 1979. (3.3)
41. *Bardeen J. M., Thorne K. S., Meltzer D. W.* Astrophys. J., **145**, 505, 1966. (19.5)
42. *Batchelor G. K.* An Introduction to Fluid Dynamics, Cambridge University Press, 1967. [Имеется перевод: Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. — М.: Мир, 1973.] (4, 4.2, 19.1a)
43. *Bath G. T., Evans W. D., Pringle J. E.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **166**, 113, 1974. (3.2a)
44. *Bellman R.* Introduction to Matrix Analysis, 2nd ed., Mc-Graw-Hill, New York, 1970. (8.126)
45. *Bisnovatyi-Kogan G. S., Blinnikov S. I.* Astron. Astrophys., **31**, 391, 1974. (19.1a, 19.5)
46. *Bludman S. A.* Astrophys. J., **183**, 637, 1973. (19.5)
47. *Bludman S. A.* Astrophys. J., **183**, 649, 1973. (19.5)
48. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М: Наука, 1974. (19.4)
49. *Böhm-Vitense E. Z.* Astrophys., **46**, 108, 1958. (19.3)
50. *Böhm-Vitense E., Nelson G. D.* Astrophys. J., **210**, 741, 1976. (19.3)
51. *Born M., Wolf E.* Principles of Optics, Pergamon Press, New York, 1959. (17.12)
52. *Breger M.* Publ. Astron. Soc. Pacific, **91**, 5, 1979. (3.1, 18.3)
53. *Brickhill A. J.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **170**, 405, 1975. (3.2a, 18.3, 19.1a)
54. *Brown T. M., Stebbins R. T., Hill H. A.* Proc. of the Los Alamos Solar and Stellar Pulsation Conf., eds. Cox A. N., Deupree R. G., 1976, p. 1. (1)
55. *Brown T. M., Stebbins R. T., Hill H. A.* Astrophys. J., **223**, 324, 1978. (1)
56. *Bryan G. H.* Phil. Mag. (5), **27**, 254, 1889. (19.1a)
57. *Buchler J. R.* Astrophys. J., **220**, 629, 1978. (12.2, 19.4)
58. *Burbidge G., Burbidge M.* Quasi-Stellar Objects, W. H. Freeman, San Francisco, 1967. [Имеется перевод: Бербидж Дж., Бербидж М. Квазары. — М.: Мир, 1969.] (1)
59. *Buta R., Smith M. A.* Astrophys. J., **232**, 213, 1979. (3.2a, 3.4, 17.66, 19.7)
60. *Cameron A. G. W.* Ann. Rev. Astron. Astrophys., **8**, 179, 1970. (3, 19.2)
61. *Campbell L., Jacchia L.* The Story of Variable Stars, The Blakiston Co., Philadelphia, 1941. (1)
62. *Campolattaro A., Thorne K. S.* Astrophys. J., **159**, 847, 1970. (19.5)
63. *Canuto V.* Annals N. Y. Acad. Sci., **302**, 514, 1977. (3)
64. *Castor J. I.* Ph. D. Thesis, California Institute of Technology, 1966. (11.1)
65. *Castor J. I.* Не опубликовано, 1968. (19.3)

66. *Castor J. I.* *Astrophys. J.*, **154**, 793, 1968. (11.1 — 11.4, 19.3)
67. *Castor J. I.* Не опубликовано, 1970. (13, 13.4)
68. *Castor J. I.* *Astrophys. J.*, **166**, 109, 1971. (8.3, 8.12б, 9.2а, 9.2б, 11.1, 11.4)
69. *Castor J. I.* *Astrophys. J.*, **178**, 779, 1972. (4.3)
70. *Castor J. I., Davis C. G., Davison D. K.* Los Alamos Rept. LA-6664, 1977. (12.2)
71. *Chandrasekhar S.* An Introduction to the Study of Stellar Structure, University of Chicago Press, Chicago, 1939. [Имеется перевод: Чандрасекар С. Введение в учение о строении звезд. — М.: ИЛ, 1950.] (8.3, 8.12в, 17.5б)
72. *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Clarendon Press, Oxford, 1961. (5.1, 17.2, 17.3, 19.1а)
73. *Chandrasekhar S.* *Astrophys. J.*, **138**, 896, 1963. (15.2)
74. *Chandrasekhar S.* *Phys. Rev. Letters*, **12**, 114, 1964. (8.10, 19.5)
75. *Chandrasekhar S.* *Phys. Rev. Letters*, **12**, 437, 1964. (8.10, 19.5)
76. *Chandrasekhar S.* *Astrophys. J.*, **140**, 417, 1964. (8.10, 19.5)
77. *Chandrasekhar S.* *Astrophys. J.*, **139**, 644, 1964. (15.2, 17.7)
78. *Chandrasekhar S.* *Observatory*, **92**, 116, 1972. (19.1а)
79. *Chandrasekhar S., Fermi E.* *Astrophys. J.*, **118**, 116, 1952. (4.6)
80. *Chandrasekhar S., Lebovitz N. R.* *Astrophys. J.*, **140**, 1517, 1964. (15.3)
81. *Chanmugam G.* *Astrophys. J.*, **217**, 799, 1977. (19.5)
82. *Chanmugam G.* *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **187**, 769, 1979. (19.2)
83. *Chiu H.-Y.* Stellar Physics, Blaisdell, Waltham, Mass., 1967. (4.3)
84. *Chiu H.-Y., Muriel A., eds.*, Stellar Evolution, MIT Press, Cambridge, Mass., 1972.
85. *Christensen-Dalsgaard J.* *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **174**, 87, 1976. (17.8)
86. *Christensen-Dalsgaard J.* *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **190**, 765, 1980. (Предисловие, 111, 17, 17.8 — 17.10, 17.12, 18)
87. *Christensen-Dalsgaard J., Dilke F. W. W., Gough D. O.* *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **169**, 429, 1974. (7.6, 18.2а, 18.3)
88. *Christensen-Dalsgaard J., Gough D. O.* *Mem. Soc. R. Sci. Liège*, **8**, 309, 1975. (18.3)
89. *Christensen-Dalsgaard J., Gough D. O.* *Nature*, **259**, 89, 1976. (19.7)
90. *Christy R. F.* *Astrophys. J.*, **136**, 887, 1962. (10.2, 12.2)
91. *Christy R. F.* *Rev. Mod. Phys.*, **36**, 555, 1964. (11.1, 12.2)
92. *Christy R. F.* *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **4**, 353, 1966. (1)
93. *Christy R. F.* *Astrophys. J.*, **144**, 108, 1966. (5.1)
94. *Christy R. F.* In Proc. IAU Symp. No. 28, Aerodynamic Phenomena in Stellar Atmospheres, ed. Thomas R. N., Academic Press, London, 1967, p. 105. (1)
95. *Christy R. F.* *Quart. J. Roy. Astron. Soc.*, **9**, 13, 1968. (1, 3.3)
96. *Christy R. F.* *SIAM Rev.*, **10**, 291, 1968 (*Phys. Abstr.*, **72**, 240, 1968.) (1)
97. *Christy R. F.* *J. Roy. Astron. Soc. Canada*, **63**, 299, 1969. (1)
98. *Christy R. F.* *J. Roy. Astron. Soc. Canada*, **64**, 8, 1970. (1)
99. *Clayton D. D.* Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis, McGraw-Hill, New York, 1968. (4.3, 5.2)
100. *Clement M.* *Astrophys. J.*, **140**, 1045, 1964. (15.3, 19.1б)
101. *Cline T. L., Desai U. D.* *Astrophys. Space Sci.*, **42**, 17, 1976. (1)
102. *Cocke W. J., Disney M. J., Taylor D. J.* *Nature*, **221**, 529, 1969. [Имеется перевод: Пульсары: Сб. статей. — М.: Мир, 1971, с. 137.] (1)
103. *Cogan B. C.* *Astrophys. J.*, **162**, 139, 1970. (3.2б, 8.6, 19.3)
104. *Cogan B. C.* *Astrophys. J.*, **211**, 890, 1977. (3.2б, 19.3)
105. *Cogan B. C.* *Astrophys. J.*, **221**, 635, 1978. (3.2б, 3.3)
106. *Cogan B. C.* *Astrophys. J. (Letters)*, **225**, L39, 1978. (3.2б)

107. *Cole J. D.* Perturbation Methods in Applied Mathematics, Blaisdell, Waltham, Mass., 1968. [Имеется перевод: Коул Дж. Методы возмущения в прикладной математике. — М.: Мир, 1972.] (12.3, 13.4, 19.4)
108. *Condon E. U., Shortley G. H.* The Theory of Atomic Spectra, Cambridge University Press, Cambridge, 1935. (17.3)
109. *Cowling T. G.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **101**, 367, 1941. (17.7 — 17.9)
110. *Cowling T. G.* Astrophys. J., **114**, 272, 1951. (18.2)
111. *Cowling T. G.* Magnetohydrodynamics, Interscience, New York, 1957. [Имеется перевод: Каулинг Т., Магнитная гидродинамика. — М.: Мир, 1964.] (4.6)
112. *Cowling T. G.* In Stellar Structure, eds. Aller L. H., McLaughlin D. B., University of Chicago Press, Chicago, 1965, p. 425. (19.2)
113. *Cowling T. G., Newing R. A.* Astrophys. J., **109**, 149, 1949. (19.1a, 19.1b)
114. *Cox A. N.* Sky and Telescope, **55**, 115, 1978. (3.26, 19.7)
115. *Cox A. N.* In Current Problems in Stellar Pulsation Instabilities, eds. Fischel D., Lesh J. R., Sparks W. M., NASA Tech. Memo. 80625, Washington, D. C., 1980, p. 69. (3.26, 19.7)
116. *Cox A. N.* Astrophys. J., **229**, 212, 1979. (3.3, 3.4, 19.7)
117. *Cox A. N., Brownlee R. R., Eilers D. D.* Astrophys. J., **144**, 1024, 1966. (8.126, 12.2, 19.3)
118. *Cox A. N., Cox J. P.* Sky and Telescope, **33**, 278, 1967. (1)
119. *Cox A. N., Cox J. P.* In Proc. IAU Colloq. No. 29, Multiple Periodic Variable Stars, ed. Fitch W. S., Reidel, Dordrecht, 1976, p. 115. (3.26)
120. *Cox A. N., Davis C. G.* Dudley Obs. Rep., **9**, 297, 1975. (3.3)
121. *Cox A. N., Deupree R. G.*, eds, Proc. of the Solar and Stellar Pulsation Conference, Los Alamos Sci. Lab. Report UC-34b, 1976. (1, 12.2)
122. *Cox A. N., Deupree R. G., King D. S., Hodson S. W.* Astrophys. J. (Letters), **214**, L127, 1977. (3.26, 19.3)
123. *Cox A. N., Hodson S. W., Davey W. R.* In Proc. Los Alamos Solar and Stellar Pulsation Conf., eds. Cox A. N., Deupree R. G., 1976, p. 188. (12.2)
124. *Cox A. N., Hodson S. W., King D. S.* Astrophys. J. (Letters), **230**, L109, 1979. (3.26, 19.7)
125. *Cox A. N., King D. S., Tabor J. E.* Astrophys. J., **184**, 201, 1973. (10, 10.3)
126. *Cox A. N., Stewart J. N.* Astrophys. J. Suppl., **19**, 243, 1970. (4.3)
127. *Cox A. N., Tabor J. E.* Astrophys. J. Suppl., **31**, 271, 1976. (4.3)
128. *Cox J. P.* Astrophys. J., **122**, 286, 1955. (7.6, 10.1, 10.2)
129. *Cox J. P.* Astrophys. J., **127**, 194, 1958. (10.2)
130. *Cox J. P.* Astrophys. J., **130**, 296, 1959. (10.3)
131. *Cox J. P.* Astrophys. J., **138**, 487, 1963. (9.2a, 9.26, 10.2, 10.3, 11.1, 11.4)
132. *Cox J. P.* In Proc. IAU Symp. No. 28, Aerodynamic Phenomena in Stellar Atmospheres, ed. Thomas R. N., Academic Press, London, 1967, p. 3. (1, 2.1, 8.8, 8.12b, 9.26)
133. *Cox J. P.* Rep. Prog. Phys., **37**, 563, 1974. (1, 3, 3.1, 4.3, 5.1, 8.12b, 8.15, 9, 9.1, 10, 10.2, 10.3, 11, 11.1, 11.2, 11.4, 12, 12.1, 12.2, 13.4, 19.1a, 19.2)
134. *Cox J. P.* Astrophys. J. (Letters), **192**, L85, 1974. (19.4)
135. *Cox J. P.* Mem. Soc. Roy. Sci. Liège, Coll. 8°, 6^e Ser. **8**, 129, 1975. (1, 12.2)
136. *Cox J. P.* Ann. Rev. Astron. Astrophys., **14**, 247, 1976. (1, 7.6, 17, 17.2, 17.8, 19.1a, 19.2)
137. *Cox J. P.* In Proc. Los Alamos Solar and Stellar Pulsation Conf., eds. Cox A. N., Deupree R. G., 1976, p. 127. (19.7)
138. *Cox J. P.* In Current Problems in Stellar Pulsation Instabilities, eds. Fischel D., Lesh J. R., Sparks W. M., NASA Tech. Memo. 80625, Washington, D.C., 1980, p. 135. (3.26, 19.3, 19.7)

139. Cox J. P. *Bull. Astron. Soc. India*, **7**, 4, 1979. (1, 3.26, 19.7)
140. Cox J. P., Castor J. I., King D. S. *Astrophys. J.*, **172**, 423, 1972. (10.3)
141. Cox J. P., Cox A. N., Eilers D. D., King D. S. Доклад, представленный на 13th General Assembly of the IAU, Prague, Czechoslovakia, 1967. (11.1)
142. Cox J. P., Cox A. N., Olsen K. H. *Astron. J.*, **68**, 276, 1963. (12.2)
143. Cox J. P., Cox A. N., Olsen K. H., King D. S., Eilers D. D. *Astrophys. J.*, **144**, 1038, 1966. (10.1, 12.2)
144. Cox J. P., Davey W. R., Aizenman M. L. *Astrophys. J.*, **191**, 439, 1974. (9.3, 19.4)
145. Cox J. P., Eilers D. D., King D. S. *Astron. J.*, **72**, 294, 1967. (11.1)
146. Cox J. P., Giull R. T. *Principles of Stellar Structure*, Gordon and Breach, New York, 1968. (1, 2.1, 2.2, 4.1, 4.26, 4.2в, 4.3, 5.2, 7.5, 8.3, 8.4, 8.6, 8.7, 8.12в, 9, 9.1, 9.3, 9.4, 10, 10.1, 10.3, 17.2, 17.9, 17.10, 17.12, 18.2а, 19, 19.3, 19.4, 19.6)
147. Cox J. P., Hansen C. J. In *Proc. IAU Colloq. No. 53, White Dwarfs and Variable Degenerate Stars*, eds. Van Horn H. M., Weidemann V., University of Rochester, New York, 1979. p. 392. (3, 3.26, 10, 10.3, 18.3)
148. Cox J. P., Hansen C. J., Davey W. R. *Astrophys. J.*, **182**, 885, 1973. (9.3, 19.4)
149. Cox J. P., King D. S. Не опубликовано, 1970. (11.4)
150. Cox J. P., King D. S. In *Evolution of Population II Stars*, ed. Philip A.G.D., Dudley Obs. Rep. No. 4, 1972, p. 103. (10.3)
151. Cox J. P., King D. S., Stellingwerf R. F. *Astrophys. J.*, **171**, 93, 1972. (2.1, 3.26, 3.3, 8.6)
152. Cox J. P., Stellingwerf R. F. *Publ. Astron. Soc. Pacific*, **91**, 319, 1979. (10, 10.3, 19.7)
153. Cox J. P., Whitney C. A. *Astrophys. J.*, **127**, 561, 1958. (10.2)
154. Davey W. R. Ph. D. Thesis, University of Colorado, 1970. (8.126, 9.26, 19.4)
155. Davey W. R. *Astrophys. J.*, **179**, 235, 1973. (9.26)
156. Davey W. R. *Astrophys. J.*, **194**, 687, 1974. (9.3, 19.4)
157. Davey W. R., Cox J. P. *Astrophys. J.*, **189**, 113, 1974. (19.4)
158. Davidson A., Henry J. P., Middleditch J., Smith H. E. *Astrophys. J. (Letters)*, **177**, L97, 1972. (1)
159. Davies G. F. *Austral. J. Phys.*, **21**, 294, 1968. (19.2)
160. Davis C. G. *Astrophys. J.*, **187**, 175, 1974. (19.5)
161. Davis C. G., Davison D. K. *Astrophys. J.*, **221**, 929, 1978. (12.2)
162. Dedic H., Tassoul J.-L. *Astrophys. J.*, **188**, 173, 1974. (19.5)
163. Dejouw R. J. *Astrophys. J.*, **182**, 215, 1973. (5.1, 18.2)
164. Demaret J. *Astrophys. Space Sci.*, **31**, 305, 1974. (5.4в, 19.4)
165. Demaret J. *Astrophys. Space Sci.*, **33**, 189, 1975. (19.4)
166. Demaret J. *Astrophys. Space Sci.*, **45**, 31, 1976. (19.4)
167. Demarque P. In *Proc. IAU Colloq. No. 21, Variable Stars in Globular Clusters and in Related Systems*, ed. Fernie J. D., Reidel, Dordrecht, 1973, p. 187. (1)
168. Detre L., ed., *Nonperiodic Phenomena in Variable Stars*, Reidel, Dordrecht, 1968. (1)
169. Detweiler S. L. *Astrophys. J.*, **197**, 203, 1975. (19.5)
170. Detweiler S. L. *Astrophys. J.*, **201**, 440, 1975. (19.5)
171. Detweiler S. L., Ipser J. R. *Astrophys. J.*, **185**, 685, 1973. (19.5)
172. Deubner F. L. *Solar Phys.*, **39**, 31, 1974. (18.3)
173. Deupree R. G. Ph. D. Dissertation, University of Toronto, 1974. (10.1, 17.7)
174. Deupree R. G. *Astrophys. J.*, **198**, 419, 1975. (10.1, 19.3)
175. Deupree R. G. *Astrophys. J.*, **201**, 183, 1975. (10.1, 19.3)
176. Deupree R. G. *Astrophys. J.*, **205**, 286, 1976. (10.1, 19.3)
177. Deupree R. G. In *Proc. Los Alamos Solar and Stellar Pulsation Conf.*, eds. Cox A. N., Deupree R. G., 1976, p. 222. (10.1, 19.3)

178. *Deupree R. G.* In Proc. Los Alamos Solar and Stellar Pulsation Conf., eds. Cox A. N., Deupree R. G., 1976, p. 229. (10.1, 19.3)
179. *Deupree R. G.* Astrophys. J., **211**, 509, 1977. (10.1, 11.4, 19.3)
180. *Deupree R. G.* Astrophys. J., **214**, 502, 1977. (10.1, 19.3)
181. *Deupree R. G.* Astrophys. J., **215**, 232, 1977. (10.1, 19.3)
182. *Deupree R. G.* Astrophys. J., **215**, 620, 1977. (10.1, 19.3)
183. *Deutsch A. J.* In Handbuch der Physik, ed. Flügge S., Springer-Verlag, West Berlin, **51**, 1958, p. 689. (1, 19.2)
184. *Dilke F. W. W., Gough D. O.* Nature, **240**, 262, 1972. (18.2, 18.2a)
185. *Duffey G. H.* Theoretical Physics: Classical and Modern Views, Houghton Mifflin Co., Boston, 1973. (4.26)
186. *Duval P., Karp A. H.* Astrophys. J., **222**, 220, 1978. (3.4)
187. *Dziembowski W.* Acta Astron., **21**, 289, 1971. (17.5, 17.56, 17.66, 17.10, 18.3)
188. *Dziembowski W.* Mem. Soc. Roy. Sci. Liège, 6^e ser., **8**, 287, 1975. (17.10, 18.3)
189. *Dziembowski W.* Acta Astron., **27**, 1, 1977. (18.3)
190. *Dziembowski W.* Acta Astron., **27**, 95, 1977. (17.10, 18.3, 19.7)
191. *Dziembowski W.* Acta Astron., **27**, 203, 1977. (3.4, 18.3)
192. *Dziembowski W.* In Proc. IAU Colloq. No. 53, White Dwarfs and Degenerate Variable Stars, eds. Van Horn H. M., Weidemann V., University of Rochester, New York, 1979, p. 359. (18.3)
193. *Eardley D. M., Press W. H.* Ann. Rev. Astron. Astrophys., **13**, 381, 1975. (1)
194. *Eckart C.* Hydrodynamics of Oceans and Atmospheres, Pergamon Press, London, 1960. [Имеется перевод: Эккарт К., Гидродинамика океана и атмосферы. — М.: ИЛ, 1963.] (17.9, 17.10)
195. *Eddington A. S.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **79**, 2, 1918. (1, 8)
196. *Eddington A. S.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **79**, 177, 1918. (1, 8)
197. *Eddington A. S.* The Internal Constitution of the Stars, Cambridge University Press, Cambridge, 1926; повторное издание Dover paperback, 1959. (1, 2.1, 5.1, 9.4, 10.1, 10.2)
198. *Eddington A. S.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **92**, 471, 1932. (19.7)
199. *Eddington A. S.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **101**, 182, 1941. (10.2, 11.4)
200. *Eddington A. S.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **102**, 154, 1942. (10.2, 11.4)
201. *Eddy J. A., ed.*, The New Solar Physics, Westview, Boulder, 1978. (1)
202. *Eggleton P., Mitton S., Whelan J., eds.*, Proc. IAU Symp. No. 73, Structure and Evolution of Close Binary Systems, Reidel, Dordrecht, Boston, 1976.
203. *Eisenfeld J. J.* Math. Annal. Appl., **26**, 357, 1969. (17.3)
204. *Epstein I.* Astrophys. J., **112**, 6, 1950. (8.13, 10.2, 17.13)
205. *Evans N. R.* Astrophys. J., **209**, 135, 1976. (3.3)
206. *Faulkner D. J.* Astrophys. J., **216**, 49, 1977. (3.26)
207. *Faulkner D. J.* Astrophys. J., **218**, 209, 1977. (2.1, 3.26, 8.6)
208. *Fernie J. D.* Astron. J., **72**, 1327, 1967. (3.1)
209. *Fernie J. D.* Astrophys. J., **151**, 197, 1968. (3.3)
210. *Fernie J. D.* Publ. Astron. Soc. Pacific, **81**, 707, 1969. (3.1, 19.7)
211. *Fernie J. D., ed.*, Proc. IAU Colloq. No. 21, Variable Stars in Globular Clusters and in Related Systems, Reidel, Dordrecht, 1973.
212. *Fernie J. D.* Publ. Astron. Soc. Pacific, **88**, 116, 1976. (18.3)
213. *Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николсико Л. Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. — К.: Наукова думка, 1966. (18.3, 19.4)
214. *Fischel D., Sparks W. M., eds.*, Cepheid Modeling, NASA Report SP-383, 1975. (1, 12.2)

215. Fischel D., Lesh J. R., Sparks W. M., eds., Current Problems in Stellar Pulsation Instabilities, NASA Tech. Memo. 80625, Washington, D.C., 1980. (1)
216. Fishman G. J., Watts J. W. Jr., Derrickson J. H. *Astrophys. J. (Letters)*, **223**, L13, 1978. (1)
217. Fitch W. S. *Astrophys. J.*, **161**, 669, 1970. (3.26)
218. Fitch W. S., ed., Proc. IAU Colloq. No. 29, Multiple Periodic Variable Stars, Reidel, Dordrecht, 1976. (1)
219. Fitch W. S. In Proc. IAU Colloq. No. 29, Multiple Periodic Variable Stars, ed. Fitch W. S., Reidel, Dordrecht, 1976, p. 167. (18.3)
220. Fitch W. S., Szeidl B. *Astrophys. J.*, **203**, 616, 1976. (3.26)
221. Forman W., Jones C. A., Liller W. *Astrophys. J. (Letters)*, **177**, L103, 1972. (1)
222. Forsyth A. R. A Treatise on Differential Equations, MacMillan, New York, 1929. (17.10)
223. Fossat E., Ricort G., Aime C., Roddier F. *Astrophys. J. (Letters)*, **193**, L97, 1974. (18.3)
224. Fraley G. S. *Astrophys. Space Sci.*, **2**, 96, 1968. (12.2, 19.3)
225. Franklin P. A Treatise on Advanced Calculus, John Wiley and Sons, 1940. [Имеется перевод: Франклин Ф., Математический анализ, части 1 и 2. — М.: ИЛ, 1950.] (9.26)
226. Fricke K. Z. *Astrophys.*, **68**, 317, 1968. (19.1a)
227. Fricke K. J., Kippenhahn R. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **10**, 45, 1972. (19.1a)
228. Gabriel M. *Astron. Astrophys.*, **1**, 321, 1969. (18.3)
229. Gaposhkin S. *Smithsonian Astrophys. Obs. Spec. Rep.*, No. 310, 1972. (3.1)
230. Gascoigne S. C. B. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **146**, 1, 1969. (3.1)
231. Geyer V. *Astron. Astrophys.*, **5**, 116, 1970. (3.1)
232. Gingold A. R., Faulkner D. J. *Astrophys. J.*, **188**, 145, 1974. (19.4)
233. Ginzburg V. L., Zheleznyakov V. V. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **13**, 511, 1975. (1)
234. Glasby J. S. The Nebular Variables, Pergamon Press, New York and Oxford, 1975. (1)
235. Goertzel G., Tralli N. Some Mathematical Methods of Physics, McGraw-Hill, New York, 1960. (8.10, 17.3)
236. Goldberg L., Aller L. H. Atoms, Stars, and Nebulae, Blakiston, Philadelphia, 1943. (3.1)
237. Goldreich P., Schubert G. *Astrophys. J.*, **150**, 571, 1967. (18.2, 19.1a)
238. Goldstein H. Classical Mechanics, Addison-Wesley Press, Cambridge, 1950. (5.4)
239. Goossens M. *Astrophys. Space Sci.*, **16**, 386, 1972. (19.2)
240. Goossens M. *Astrophys. Space Sci.*, **43**, 9, 1976. (19.2)
241. Goossens M. *Astrophys. Space Sci.*, **44**, 397, 1976. (19.2)
242. Goossens M., Smeyers P. *Astrophys. Space Sci.*, **26**, 137, 1974. (17.10, 17.13)
243. Goossens M., Smeyers P., Denis J. *Astrophys. Space Sci.*, **39**, 257, 1976. (19.2)
244. Gough D. O. *Astron. J.*, **72**, 799, 1967. (13, 19.3)
245. Gough D. O. In Proc. IAU Colloq. No. 38, Problems of Stellar Convection, eds. Spiegel E. A., Zahn J. P., Springer-Verlag, West Berlin — Heidelberg — New York, 1977, p. 15. (18.2a, 19.3)
246. Gough D. O. *Astrophys. J.*, **214**, 196, 1977. (19.3)
247. Gough D. O. In The Solar Output and Its Variation, ed. White O. R., Colorado Associated University Press, Boulder, 1977, p. 451. [Имеется перевод: Поток энергии Солнца и его изменения/Под ред. О. Уайта. — М.: Мир, 1980, с. 481.] (1)
248. Gursky H. *Annals New York Acad. Sci.*, **302**, 197, 1977. (1)
249. Greenspan H. P. The Theory of Rotating Fluids, Cambridge University Press, Cambridge, 1968. (1, 19.1a)

250. *Hanbury Brown R., Davis J., Allen L. R.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **137**, 375, 1967; **167**, 121 1974. (3.3)
251. *Hansen C. J.*, ed., *Physics of Dense Matter*, Reidel, New York, 1973.
252. *Hansen C. J.* Ann. Rev. Astron. Astrophys., **16**, 15, 1978. (19.6)
253. *Hansen C. J.* In *Nonradial and Nonlinear Stellar Pulsation*, Proc. of a Workshop, eds. Hill H. A., Dziembowski W., *Lecture Notes in Physics*, vol. 125, Springer-Verlag, West Berlin-Heidelberg — New York, 1980, p. 445. (3, 3.2a)
254. *Hansen C. J., Aizenman M. L., Ross R. R.* Astrophys. J., **207**, 736, 1976. (17.10)
255. *Hansen C. J., Cox J. P., Carrol B. W.* Astrophys. J., **226**, 210, 1978. (19.1r)
256. *Hansen C. J., Cox J. P., Herz M. A.* Astron. Astrophys., **19**, 144, 1972. (5.1)
257. *Hansen C. J., Cox J. P., Van Horn H. M.* Astrophys. J., **217**, 151, 1977. (19.1a, 19.2)
258. *Hansen C. J., Van Horn H. M.* Astrophys. J., **233**, 253, 1979. (17.4, 19)
259. *Härm R., Schwarzschild M.* Astrophys. J., **139**, 594, 1964. (19.4)
260. *Härm R., Schwarzschild M.* Astrophys. J., **172**, 403, 1972. (5.1)
261. *Harwit M.* *Astrophysical Concepts*, John Wiley, New York, 1973. (3)
262. *Heintzmann H., Hillebrandt W.* Astron. Astrophys., **28**, 51, 1975. (19.5)
263. *Henden A. A., Cox A. N.* In Proc. Los Alamos Solar and Stellar Pulsation Conf., eds. Cox A. N., Deupree R. G., 1976, p. 167. (19.3)
264. *Herbig G. H.* Adv. Astron. Astrophys., **1**, 47, 1962. (1, 3)
265. *Herbig G. H.* Astrophys. J., **217**, 693, 1978. (3)
266. *Herbst W., Hesser J. E., Ostriker J. P.* Astrophys. J., **193**, 679, 1974. (3.2a)
267. *Hewish A.* Ann. Rev. Astron. Astrophys., **8**, 265, 1970. (1, 3)
268. *Hill H. A.* In *The New Solar Physics*, ed. Eddy J. A., Westview, Boulder, Colorado, 1978, p. 135. (1, 8.4, 17.7, 19.7)
269. *Hill H. A., Caudell T. P., Rosenwald R. D.* Astrophys. J. (Letters), **213**, L81, 1977. (17.6)
270. *Hill H. A., Dziembowski W.*, eds., *Nonradial and Nonlinear Stellar Pulsation*, Proceedings of a Workshop, *Lecture Notes in Physics*, vol. 125, Springer-Verlag, West Berlin — Heidelberg — New York, 1980. (1, 8.4, 19.7)
271. *Hill H. A., Rosenwald R. D., Caudell T. P.* Astrophys. J., **225**, 304, 1977. (17.66)
272. *Hill H. A., Stebbins R. T., Brown T. M.* In Proc. Fifth International Conf., Atomic Masses and Fundamental Constants, vol. 5, eds. Sanders J. H., Wapstra A. H., Plenum Press, New York, 1976, p. 622. (1)
273. *Hill S. J.* Ph. D. Thesis, University of Colorado, 1970. (3.3)
274. *Hill S. J., Willson L. A.* Astrophys. J., **229**, 1029, 1979. (10.2)
275. *Hillebrandt W., Steinmetz K. O.* Astron. Astrophys., **53**, 283, 1976. (19.5)
276. *Hiltner W. A., Mook D. E.* Ann. Rev. Astron. Astrophys., **8**, 139, 1970. (1)
277. *Hoffmeister C.* *Veränderliche Sterne*, under collaboration by Richter G. A., Wenzel W., Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1971. (1, 3)
278. *Hoffmeister E. Z.* Astrophys., **65**, 194, 1967. (3.1)
279. *Hurley M., Roberts P. H., Wright K.* Astrophys. J., **143**, 535, 1966. (8.12a, 8.15, 17.7, 17.8)
280. *Iben I., Jr.* Publ. Astron. Soc. Pacific, **83**, 697, 1971. (1)
281. *Iben I., Jr.* Astrophys. J., **166**, 131, 1971. (9.2a, 9.2b, 9.3, 11.4, 19.3)
282. *Ince E. L.* *Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, New York, 1944. (8.5, 8.7 — 8.10, 17.9, 17.10)
283. *Ipsen J. R., Thorne K. S.* Astrophys. J., **181**, 181, 1973. (19.5)
284. *Ishizuka T.* Publ. Astron. Soc. Japan, **19**, 495, 1967. (13)
285. *Jackson J. D.* *Classical Electrodynamics*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1962. [Имеется перевод: Джэксон Дж., Классическая электродинамика. — М.: Мир, 1965.] (17.3)

286. James R. A., Kahn F. D. *Astron. Astrophys.*, **12**, 332, 1971. (19.1a)
287. Jeans J. H. *Astronomy and Cosmogony*, Cambridge University Press, Cambridge, 1928; повторное издание Dover paperback, 1961. (13.1, 19.6)
288. Jenkins F. A., White H. E. *Fundamentals of Optics*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1957. (17.12)
289. Joos G. *Theoretical Physics*, Hafner Publ. Co., New York, 1932. (4.5)
290. Kaniel S., Kovetz A. *Phys. Fluids*, **10**, 1186, 1967. (17.3)
291. Karp A. H. *Astrophys. J.*, **201**, 641, 1975. (3.3, 3.4)
292. Karp A. H. In *Cepheid Modeling*, eds. Fischel D., Sparks W. M., NASA Report SP-383, NASA, Washington, D.C., 1975, p. 99. (11.4)
293. Kato S. *Publ. Astron. Soc. Japan*, **18**, 374, 1966. (18.2, 18.2a, 18.3)
294. Kato S. In *Proc. IAU Colloq. No. 29, Multiple Periodic Variable Stars*, ed. Fitch W. S., Reidel, Dordrecht, 1976, p. 33. (19.7)
295. Kato S., Unno W. *Publ. Astron. Soc. Japan*, **19**, 1, 1967. (19.4)
296. Keeley D. A. *Astrophys. J.*, **161**, 643, 1970. (10.2)
297. Keeley D. A. *Astrophys. J.*, **161**, 657, 1970. (10.2)
298. Keller C. F., Mutschlecner J. P. *Astrophys. J.*, **167**, 127, 1971. (11.4)
299. King D. S., Cox J. P. *Publ. Astron. Soc. Pacific*, **80**, 365, 1968. (1, 10.2, 11.1)
300. King D. S., Cox J. P., Eilers D. D., Davey W. R. *Astrophys. J.*, **182**, 859, 1973. (8.13, 10.1)
301. King D. S., Hansen C. J., Ross R. R., Cox J. P. *Astrophys. J.*, **195**, 467, 1975. (3.26, 8.6)
302. King D. S., Wheeler J. C., Cox J. P., Hodson S. W. *Bull. Amer. Astron. Soc.*, **10**, 633, 1978. (9.2a)
303. King D. S., Wheeler J. C., Cox J. P., Cox A. N., Hodson S. W. In *Nonradial and Nonlinear Stellar Pulsation, Proceedings of a Workshop*, eds. Hill H. A., Dziembovski W., *Lecture Notes in Physics*, vol. 125, Springer-Verlag, West Berlin — Heidelberg — New York, 1980, p. 161. (9.2a)
304. Kippenhahn R. *Z. Astrophys.*, **67**, 271, 1967. (19.6)
305. Kippenhahn R. In *Proc. IAU Symp. No. 66, Late Stages of Stellar Evolution*, ed. Taylor R. J., Reidel, Dordrecht, 1974, p. 20. (19.6)
306. Kippenhahn R., Rahe J., Strohmeier W. eds., *Proc. IAU Colloq. No. 42, The Interaction of Variable Stars with Their Environment*, Veröff. Remeis-Sternw. Bamberg, Astron. Inst. Univ. Erlangen-Nürnberg, **11**, Nr. 121, 1977. (1)
307. Klebesadel R. W., Strong I. B. *Astrophys. Space Sci.*, **42**, 3, 1976. (1)
308. Kopal Z. *Astrophys. J.*, **109**, 509, 1949. (17.9)
309. Korn G. A., Korn T. M. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill, New York, 1968. [Имеется перевод: Кори Г., Кори Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров*. — М.: Наука, 1974.] (6.1)
310. Kraft R. P. *Astrophys. J.*, **134**, 616, 1961. (3.1)
311. Kraft R. P. *Astrophys. J.*, **135**, 408, 1962. (3.2a)
312. Kraft R. P. *Adv. Astron. Astrophys.*, **2**, 43, 1963. (3.2a)
313. Kruskal M., Schwarzschild M., Härm R. *Astrophys. J.*, **214**, 498, 1977. (18.2)
314. Крылов М. М., Боголюбов Н. Н. *Введение в нелинейную механику*. — К.: Изд. АН УССР, 1937. (19.4)
315. Пульсирующие звезды/Под ред. Б. В. Кукаркина. — М.: Наука, 1970. (1, 3)
316. Кукаркин Б. В., Холопов П. Н., Ефремов Ю. Н., Кукаркина Н. П., Курочкин Н. Е., Медведева Г. И., Перова Н. Б., Федорович В. П., Фролов М. С. *Общий каталог переменных звезд*, 3-е изд. — М.: Наука, 1969 — 1971. (1, 3.1)

317. Кукаркин Б. В., Холопов П. Н., Ефремов Ю. Н., Кукаркина Н. П., Курочкин Н. Е., Медведева Г. И., Перова Н. Б., Псковский Ю. П., Федорович В. П., Фролов М. С. Второе дополнение к Третьему изданию Общего каталога переменных звезд. — М.: Астрономический совет АН СССР, 1974. (3.1)
318. Кукаркин Б. В., Холопов П. Н., Федорович В. П., Фролов М. С., Кукаркина Н. П., Курочкин Н. Е., Медведева Г. И., Перова Н. Б., Псковский Ю. П. Третье дополнение к третьему изданию Общего каталога переменных звезд. — М.: Астрономический совет АН СССР, 1976. (3.1)
319. *Kukarkin B. V., Parenago P. P.* In *Basic Astronomical Data*, ed. Strand K. A., University of Chicago Press, Chicago, 1963, p. 328. (1, 3)
320. *Kutter G. S., Sparks W. M.* *Astrophys. J.*, **175**, 407, 1972. (12.2)
321. *Lamb D. Q.* *Astrophys. J. (Letters)*, **192**, L129, 1974. (3.2a)
322. *Lamb D. Q., Sorvari J. M.* *IAU Circular No. 2442*, 1972. (1)
323. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред, 2-е изд. — М.: Гостехиздат, 1954. (4, 5.5)
324. *Langer G. E.* *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **155**, 199, 1971. (9.2a, 10.2)
325. Латышев И. Н. *Астрофизика*, **5**, 331, 1969. (3.1)
326. *Lebovitz N. R.* *Astrophys. J.*, **142**, 229, 1965. (17.8)
327. *Lebovitz N. R.* *Astrophys. J.*, **142**, 1257, 1965. (17.8)
328. *Lebovitz N. R.* *Astrophys. J.*, **146**, 946, 1966. (17.8)
329. *Lebovitz N. R.* *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **5**, 465, 1967. (19.1a)
330. *Lebovitz N. R.* *Astrophys. J.*, **160**, 701, 1970. (19.1a)
331. *Lebovitz N. R., Reid W. H., Vandervoort P. O.*, eds., *Theoretical Principles in Astrophysics and Relativity*, University of Chicago Press, Chicago and London, 1978.
332. *Ledoux P.* *Astrophys. J.*, **102**, 143, 1945. (19.1a)
333. *Ledoux P.* *Astrophys. J.*, **114**, 373, 1951. (19.1a)
334. *Ledoux P.* *Ann. d'Astrophys.*, **18**, 232, 1955. (8.12a)
335. *Ledoux P.* In *Handb. der Physik*, ed. Flügge S., Springer-Verlag, West Berlin, **51**, 1958, p. 605. (9.4, 19.4)
336. *Ledoux P.* In *Star Evolution*, ed. Gratton L., Academic Press, New York, 1963, p. 394. (1, 9.3, 13.1; 19.4)
337. *Ledoux P.* In *Stellar Structure*, eds. Aller L. H., McLaughlin D. B., University of Chicago Press, Chicago, 1965, p. 499. (1, 19.2)
338. *Ledoux P.* In *Proc. IAU Symp. No. 59, Stellar Instability and Evolution*, eds. Ledoux P., Noels A., Rodgers A. W., Reidel, Dordrecht, 1974, p. 135. (1, 17, 17.2, 17.8—17.10, 18.2, 18.2a)
339. *Ledoux P.* In *Theoretical Principles in Astrophysics and Relativity*, eds. Lebovitz N., Reid W. H., Vandervoort P. O., University of Chicago Press, Chicago and London, 1978, p. 15. (1, 17, 17.9, 17.10)
340. *Ledoux P., Noels A., Rodgers A. W.*, eds., *Proc. IAU Symp. No. 59, Stellar Instability and Evolution*, Reidel, Dordrecht, 1974. (1)
341. *Ledoux P., Pekeris C. L.* *Astrophys. J.*, **94**, 124, 1941. (8.15)
342. *Ledoux P., Renson R.* *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **4**, 293, 1966. (1, 3, 19.2)
343. *Ledoux P., Simon R., Bierlaire J.* *Ann. d'Astrophys.*, **18**, 65, 1955. (8.15, 10.1, 10.2)
344. *Ledoux P., Smeyers P.* *C.R. Acad. Sci. Paris*, **262**, 841, 1966. (17.8, 17.9)
345. *Ledoux P., Walraven Th.* In *Handbuch der Physik*, ed. Flügge S., Springer-Verlag, West Berlin, **51**, 1958, p. 353. (1, 2.1, 3, 4, 4.2a — 4.2b, 5.1, 7.6, 8.4, 8.5, 8.9 — 8.11, 8.12a, 8.15, 9.26, 12.1, 12.3, 16.2, 17.1, 17.5, 17.66, 17.7 — 17.9, 17.11, 18.3, 19, 19.1a — 19.1b, 19.2)
346. *Ledoux P., Whitney C. A.* In *Aerodynamic Phenomena in Stellar Atmospheres*, ed. Thomas R. N., *Nuovo Cimento*, **22**, Ser. X, Suppl. No. 1, 1961, p. 131. [Имеется не-

- ревод: Космическая газодинамика/Под ред. Р. Томаса. — М.: Мир, 1964, с. 206.] (1, 9.2a)
347. *Leighton R. B., Noyes R. W., Simon G. W.* *Astrophys. J.*, **135**, 474, 1962. (18.3)
 348. *Lewin W. H. G.* *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, **302**, 210, 1977. (1)
 349. *Lewin W. H. G., Hoffman J. H., Doty J., Clark G. W., Swank J. H., Becker R. H., Pravdo S. H., Serlemitsos P. J.* *Nature*, **267**, 28, 1977. (1)
 350. *Lewin W. H. G., van Paradijs J.* *Sky and Telescope*, **57**, 446, 1979. (1)
 351. *Lighthill J.* *Waves in Fluids*, Cambridge University Press, London, 1978. [Имеется перевод: Лайтхилл Дж., Волны в жидкостях. — М.: Мир, 1981.] (1)
 352. *Love A. E. H.* *Phil. Mag.*, Ser. 5, **27**, 254, 1889. (19.1a)
 353. *Lovell A. B. C.* *Quart. J. Roy. Astron. Soc.*, **12**, 98, 1971. (3)
 354. *Lucy L.* *Astrophys. J.*, **206**, 499, 1976. (18.3, 19.7)
 355. *Luyten W. J.*, ed., *Proc. IAU Symp. No. 42, White Dwarfs*, Reidel, Dordrecht, 1971. [Имеется перевод: Белые карлики: Сб. статей. — М.: Мир, 1975.]
 356. *Lynden-Bell D., Ostriker J. P.* *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **136**, 293, 1967. (5.3, 8.10, 9.3, 15.2, 15.3, 19.1a, 19.1b)
 357. *Maeder A., Rufener F.* *Astron. Astrophys.*, **20**, 437, 1972. (18.3)
 358. *Main I. G.* *Vibrations and Waves in Physics*, Cambridge University Press, London, 1978. (1)
 359. Макаренко Е. Н. *Астрон. цирк.*, № 673, с. 7, 1972. (3.1)
 360. *Markey P., Tayler R. J.* *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **163**, 77, 1973. (19.2)
 361. *Markey P., Tayler R. J.* *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **168**, 505, 1974. (19.2)
 362. *McConnell A. J.* *Applications of the Absolute Differential Calculus*, Blackie and Sons Ltd., London, 1931. (4.1)
 363. *McGraw J. T.* Ph. D. Dissertation, University of Texas, 1977. (1, 3, 3.2a, 18.3, 19.7)
 364. *McGraw J. T., Robinson E. L.* *Astrophys. J. (Letters)*, **200**, L89, 1975. (3.2a)
 365. *McGraw J. T., Robinson E. L.* *Astrophys. J. (Letters)*, **205**, L155, 1976. (3.2a, 18.3)
 366. *McNamara D. H., Feltz K. A. Jr.* *Publ. Astron. Soc. Pacific*, **90**, 275, 1978. (3)
 367. *Meltzer D. W., Thorne K. S.* *Astrophys. J.*, **145**, 514, 1966. (8.5)
 368. *Melvin P. J.* Не опубликовано, 1975. (13.4)
 369. *Melvin P. J.* *SIAM J. Appl. Math.*, **33**, 161, 1977. (12.3)
 370. *Mestel L.* In *Stellar Structure*, eds. *Aller L. H., McLaughlin D. B.*, University of Chicago Press, Chicago, 1965, p. 465. [Имеется перевод: Внутреннее строение звезд/Под ред. Л. Аллера и Д. Мак-Лафлина. — М.: Мир, 1970, с. 249.] (19.1a)
 371. *Mestel L.* In *Theoretical Principles in Astrophysics and Relativity*, eds. *Lebovitz N. R., Reid W. H., Vandervoort P. O.*, University of Chicago Press, Chicago, 1978, p. 69. (19.2)
 372. *Mihalas D.* *Stellar Atmospheres*, 2nd ed., W. H. Freeman, San Francisco, 1978. [Имеется перевод: Михалас Д., Звездные атмосферы. — М.: Мир, 1982.] (3.4, 9.2)
 373. *Mihalas D., Kunasz P. B., Hummer D. G.* *Astrophys. J.*, **203**, 265, 1975. (3.4)
 374. *Milne-Thomson L. M.* *Theoretical Hydrodynamics*, 4th ed., MacMillan, New York, 1960. [Имеется перевод: Милн-Томсон Л., Теоретическая гидродинамика. — М.: Мир, 1964.] (4, 4.2a, 4.2b)
 375. *Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A.* *Gravitation*, W. H. Freeman, San Francisco, 1973. [Имеется перевод: Миннер Ч., Тори К., Уилер Дж., Гравитация, в 3-х томах. — М.: Мир, 1977.] (1, 4, 19.5)
 376. Митропольский Ю. А. *Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний*. — М.: Наука, 1964. (19.4)
 377. *Mohan C.* *Publ. Astron. Soc. Japan*, **24**, 133, 1972. (12.3)
 378. *Monaghan J. J.* *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **131**, 105, 1965. (19.2)
 379. *Monaghan J. J.* *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **132**, 1, 1966. (19.2)

380. Monaghan J. J. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **134**, 275, 1966. (19.2)
381. Monaghan J. J. Z. Astrophys., **68**, 461, 1968. (19.2)
382. Monaghan J. J. Z. Astrophys., **69**, 146, 1968. (19.2)
383. Monaghan J. J. Z. Astrophys., **69**, 154, 1968. (19.2)
384. Monaghan J. J., Robson K. W. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **155**, 231, 1971. (19.2)
385. Moore D. W., Spiegel E. A. Astrophys. J., **143**, 871, 1966. (13, 18.3)
386. Morse P. M. Vibration and Sound, McGraw-Hill, New York, 1936. (1)
387. Morse P. M., Feshbach H. Methods of Theoretical Physics, McGraw-Hill, New York, 1953. (4.26, 6.1)
388. Mumford G. S. Publ. Astron. Soc. Pacific, **79**, 283, 1967. (1)
389. Murphy J. O. Australian J. Phys., **21**, 465, 1968. (12.3)
390. Murphy J. O., Smith A. O. Proc. Astron. Soc. Australia, **1**, 328, 1970. (12.3)
391. Musman S., Rust D. M. Solar Phys., **13**, 261, 1970. (18.3)
392. Nather R. E. Publ. Astron. Soc. Pacific, **90**, 477, 1978. (1, 3, 3.1, 3.2a, 18.3, 19.7)
393. Ni W. T. Astrophys. J., **181**, 939, 1973. (19.5)
394. Nikolov N., Tsvetkov T. Astrophys. Space Sci., **16**, 445, 1972. (3.1)
395. Noels A., Boury A., Scuftaire R., Gabriel M. Astron. Astrophys., **31**, 185, 1974. (7.6, 17.10)
396. Nordlund A. Astron. Astrophys., **32**, 407, 1974. (19.3)
397. Nordlund A. Astron. Astrophys., **50**, 23, 1976. (19.3)
398. Okamoto I. Publ. Astron. Soc. Japan, **19**, 384, 1967. (19.4)
399. Okamoto I., Unno W. Publ. Astron. Soc. Japan, **19**, 154, 1967. (13)
400. Oke J. B. Astrophys. J., **133**, 90, 1961. (3.3)
401. Oke J. B. Astrophys. J., **134**, 214, 1961. (3.3)
402. Oke J. B., Searle L. Ann. Rev. Astron. Astrophys., **12**, 315, 1974. (1)
403. Öpik E. J. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **111**, 278, 1951. (19.1a)
404. Osaki Y. Publ. Astron. Soc. Japan, **18**, 7, 1966. (19.1a)
405. Osaki Y. Publ. Astron. Soc. Japan, **23**, 405, 1971. (3.4)
406. Osaki Y. Publ. Astron. Soc. Japan, **24**, 509, 1972. (19.1a)
407. Osaki Y. Publ. Astron. Soc. Japan, **27**, 237, 1975. (17.9 — 17.11, 17.14, 18.2, 18.2a)
408. Osaki Y. Publ. Astron. Soc. Japan, **28**, 105, 1976. (17.10, 17.14)
409. Osaki Y. Publ. Astron. Soc. Japan, **29**, 235, 1977. (17.10, 18.3, 19.7)
410. Osaki Y., Hansen C. J. Astrophys. J., **185**, 277, 1973. (3.2a, 17.5, 19.5)
411. Osaki Y., Hansen C. J. Astron. Astrophys., **23**, 475, 1973. (5.1)
412. Ostriker J. P. Annals N. Y. Acad. Sci., **302**, 229, 1977. (1)
413. Ostriker J. P. In Theoretical Principles in Astrophysics and Relativity, eds. Lebovitz N. R., Reid W. H., Vandervoort P. O., University of Chicago Press, Chicago and London, 1978, p. 59. (19.1)
414. Owen J. W. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **177**, 384, 1957. (17.9)
415. Papagiannis M. D., ed., Eighth Texas Symposium on Relativistic Astrophysics, Annals New York Acad. Sci., **302**, 1977.
416. Papaloizou J. C. B. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **162**, 143, 1973. (12.3)
417. Papaloizou J. C. B. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **162**, 169, 1973. (12.2)
418. Papaloizou J. C. B., Pringle J. E. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **182**, 423, 1978. (17.3, 19.1a)
419. Parsons S. B. Astrophys. J. Suppl., **18**, 127, 1969. (19.3)
420. Parsons S. B. Astrophys. J., **164**, 355, 1971. (3.3, 3.4)
421. Parsons S. B. Astrophys. J., **174**, 57, 1972. (3.3, 3.4)
422. Parsons S. B., Bouw G. D. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **153**, 133, 1971. (3.3)
423. Patterson J., Robinson E. L., Nather R. E. Astrophys. J., **214**, 144, 1977. (3, 3.2a, 19.7)

424. *Payne-Gaposchkin C.* In *Astrophysics: A Topical Symposium*, ed. Hynek J. A., McGraw-Hill, New York, 1951, p. 495. (1, 3, 3.1)
425. *Payne-Gaposchkin C.* *Variable Stars and Galactic Structure*, Athlone Press, London, 1954. (1,3)
426. *Payne-Gaposchkin C.* *The Galactic Novae*, North Holland, Amsterdam, 1957. (1)
427. *Payne-Gaposchkin C.* *Vistas in Astron.*, **4**, 184, 1961. (3.1)
428. *Payne-Gaposchkin C., Gaposchkin S.* In *Basic Astronomical Data*, ed. Strand K. A., University of Chicago Press, Chicago, 1963, p. 448. (3, 3.1)
429. *Payne-Gaposchkin C., Gaposchkin S.* *Smithsonian Astrophys. Obs. Rep.*, No. 9, 1965. (3.1, 13.3)
430. *Payne-Gaposchkin C., Gaposchkin S.* *Vistas in Astron.*, **8**, 191, 1966. (3.1)
431. *Payne-Gaposchkin C., Haramundanis K.* *Introduction to Astronomy*, 2nd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1970. (3.1)
432. *Pekeris C. L.* *Astrophys. J.*, **88**, 189, 1938. (17.7, 17.8)
433. *Pel J. W.* *Astron. Astrophys.*, **62**, 75, 1978. (3, 3.1)
434. *Penrose R.* *Scientific American*, **226**, No. 5, 38, 1972. (1)
435. *Percy J. R.* *Scientific American*, **232**, No. 6, 66, 1975. (1)
436. *Perdang J.* *Astrophys. Space Sci.*, **1**, 355, 1968. (17.3)
437. *Perry J. J., Burbidge E. M., Burbidge G. R.* *Publ. Astron. Soc. Pacific*, **90**, 337, 1978. (1)
438. *Petersen J. O.* *Astron. Astrophys.*, **27**, 89, 1973. (3.26)
439. *Petersen J. O.* *Astron. Astrophys.*, **34**, 309, 1974. (3.26)
440. *Petersen J. O.* *Mem. Soc. Roy. Sci. Liège, 6^e ser.*, **8**, 299, 1975. (8.13)
441. *Petersen J. O.* In *Proc. IAU Colloq. No. 29, Multiple Periodic Variable Stars*, ed. Fitch W. S., Reidel, Dordrecht, 1976, p. 195. (3, 3.1)
442. *Petersen J. O.* *Astron. Astrophys.*, **62**, 205, 1978. (3.26)
443. *Philip A. G. D., ed.*, *The Evolution of Population II Stars*, Dudley Observatory Report, No. 4, 1972. (1)
444. *Phillips H. B.* *Vector Analysis*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1933. (4.26, 4.2a, 17.3)
445. *Pickering E. C.* *Harvard Circ.*, No. 173, 1912. (3.1)
446. *Pollack J., Hansen C. J.* Не опубликовано, 1970. (8.12a)
447. *Price R., Thorne K. S.* *Astrophys. J.*, **155**, 163, 1969. (19.5)
448. *Rabinowitz I.* *Astrophys. J.*, **126**, 386, 1957. (10.1, 10.2)
449. *Ralston A.* *A First Course in Numerical Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1965. (8.126)
450. *Rhodes E. J., Ulrich R. K., Simon G. W.* *Astrophys. J.*, **218**, 901, 1977. (18.3)
451. *Richer H. B., Ulrych T. J.* *Astrophys. J.*, **192**, 719, 1974. (3.2a)
452. *Richtmyer R. D., Morton K. W.* *Difference Methods for Initial-Value Problems*, 2nd ed., Interscience, New York, 1967. [Имеется перевод: Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. — М.: Мир, 1972.] (12.2)
453. *Robe H.* *Bull. Acad. Roy. Belge, Cl. 5c, 5^e series*, **51**, 595, 1965. (17.7)
454. *Robe H.* *Ann. d'Astrophys.*, **31**, 475, 1968. (17.8 — 17.10)
455. *Robinson E. L.* *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **14**, 119, 1976. (1, 3, 19.7)
456. *Robinson E. L., McGraw J. T.* *Astrophys. J. (Letters)*, **207**, L37, 1976. (1, 3.2a, 19.7)
457. *Robinson E. L., McGraw J. T.* In *Proc. Los Alamos Solar and Stellar Pulsation Conf.*, eds. Cox A. N., Deupree R. G., 1976, p. 98. (1, 3.2a, 19.7)
458. *Robinson E. L., Nather R. E., McGraw J. T.* *Astrophys. J.*, **210**, 211, 1976. (1, 3.2a, 19.7)
459. *Rodgers A. W.* *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **117**, 85, 1957. (3.3)
460. *Rodgers A. W., Gingold A. R.* *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **161**, 23, 1973. (3.26)

461. *Rojansky V.* Introductory Quantum Mechanics, Prentice-Hall, New York, 1938. (17.3)
462. *Rose W.* Astrophysics, Rinehart and Winston, New York, 1973. (3)
463. *Rosenbluth M. N., Bahcall J. N.* Astrophys. J., **184**, 9, 1973. (19.6)
464. *Rosendahl J. D., Snowden M. S.* Astrophys. J., **169**, 281, 1971. (18.3)
465. *Rosseland S.* The Pulsation Theory of Variable Stars, Clarendon Press, Oxford, 1949; повторное издание, 1964. [Имеется перевод: Росселанд С. Теория пульсаций переменных звезд. — М.: ИЛ, 1952.] (1, 4, 5.2, 8.12a, 8.15, 9.26, 11.1, 12.3, 19.4)
466. *Rosseland S., Randers G.* Astrophys. Norvegica, **3**, 71, 1938. (7.6)
467. *Roxburgh I. W.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **126**, 67, 1963. (19.2)
468. *Roxburgh I. W.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **132**, 207, 1966. (19.2)
469. *Roxburgh I. W.* In Stellar Rotation, ed. Slettebak A., Reidel, Dordrecht, 1970, p. 9. (19.1a)
470. *Rudd T. J., Rosenberg R. M.* Astron. Astrophys., **6**, 193, 1970. (13, 13.2, 13.4)
471. *Ruderman M.* Ann. Rev. Astron. Astrophys., **10**, 427, 1972. (1, 3)
472. *Ruderman M.* Ann. New York Acad. Sci., **262**, 159, 1975. (1)
473. *Ruffini R., Wheeler J. A.* Phys. Today, **24**, No. 1, 30, 1971. (1)
474. *Saio H., Cox J. P.* In Nonradial and Nonlinear Stellar Pulsation, Proc. of a Workshop, eds. Hill H. A., Dziembowski W., Lecture Notes in Physics, vol. 125, Springer-Verlag, West Berlin — Heidelberg — New York, 1980, p. 169. (10, 19.7)
475. *Saio H., Cox J. P.* Astrophys. J., **236**, 549, 1980. (18.1, 18.3)
476. *Saio H., Cox J. P., Hansen C. J., Carroll B. W.* In Nonradial and Nonlinear Stellar Pulsation, Proc. of a Workshop, eds. Hill H. A., Dziembowski W., Lecture Notes in Physics, vol. 125, Springer-Verlag, West Berlin — Heidelberg — New York, 1980, p. 135. (19.1r)
477. *Saio H., Kobayashi E., Takeuti M.* Sci. Rep. Tohoku University, **51**, 144, 1977. (3.26, 19.3)
478. *Sandage A. R.* Quart. J. Roy. Astron. Soc., **13**, 202, 1972. (3.1)
479. *Sandage A. R., Tammann G. A.* Astrophys. J., **151**, 531, 1968. (3.1)
480. *Sandage A. R., Tammann G. A.* Astrophys. J., **157**, 683, 1969. (3.1)
481. *Sandage A. R., Tammann G. A.* Astrophys. J., **167**, 293, 1971. (3.1)
482. *Sandage A. R., Tammann G. A.* Astrophys. J., **194**, 559, 1974. (3.1)
483. *Sandage A. R., Tammann G. A.* Astrophys. J. (Letters), **207**, L1, 1976. (3.1)
484. *Sandage A. R., Tammann G. A.* Astrophys. J., **210**, 7, 1976. (3.1)
485. *Sanders J. H., Wapstra A. H., eds.*, Proc. of the Fifth International Conference, Atomic Masses and Fundamental Constants, vol. 5, Plenum Press, New York, 1976. (1)
486. *Sargent W. L. W.* Ann. Rev. Astron. Astrophys., **2**, 297, 1964. (1, 19.2)
487. *Sastry V. K., Simon N. R.* Astrophys. J., **186**, 997, 1973. (19.4)
488. *Sauvener-Goffin E.* Bull. Soc. Roy. Sci. Liège, **20**, 20, 1951. (17.7, 17.9)
489. *Schaltenbrand R., Tammann G. A.* Astron. Astrophys., **7**, 289, 1970. (3.1)
490. *Schatzman E.* Ann. d'Astrophys., **16**, 162, 1953. (7.6)
491. *Schatzman E.* Ann. d'Astrophys., **19**, 45, 1956. (8.4)
492. *Schiff L.* Quantum Mechanics, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1955. [Имеется перевод: Шифф Л., Квантовая механика. — М.: ИЛ, 1957 (1-е изд.), 1959 (2-е изд.).] (15.2)
493. *Schmidt E. G.* Astrophys. J., **165**, 335, 1971. (3.3)
494. *Schmidt E. G.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **167**, 613, 1974. (3.26)
495. *Schutz B. F.* Astrophys. J., **232**, 874, 1979. (19.16)
496. *Schutz B. F. Jr.* Astrophys. J. Suppl., **24**, 319, 1972. (19.5)
497. *Schwank D. C.* Не опубликовано, 1975. (17.8)
498. *Schwank D. C.* Astrophys. Space Sci., **43**, 459, 1976. (17.8, 17.13)

499. Schwarzschild K. Nachr. Gesellwiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse, **1**, 41, 1906. (17.2, 18.2)
500. Schwarzschild M. Structure and Evolution of the Stars, Princeton University Press, Princeton, 1958. [Имеется перевод: Шварцшильд М. Строение и эволюция звезд. — М.: ИЛ, 1961.] (7.5, 8.12a, 19.1a)
501. Schwarzschild M. Astrophys. J., **195**, 137, 1975. (18.3)
502. Scuflaire R. Astron. Astrophys., **34**, 449, 1974. (17.8 — 17.10)
503. Scuflaire R. Astron. Astrophys., **36**, 107, 1974. (17.9 — 17.11)
504. Serkowski K. Astrophys. J., **160**, 1107, 1970. (18.3)
505. Shapley H. Astrophys. J., **40**, 448, 1914. (1)
506. Shawl S. J. Publ. Astron. Soc. Pacific, **86**, 843, 1974. (18.3)
507. Shibahashi H. Publ. Astron. Soc. Japan, **31**, 87, 1979. (Предисловие, III, 17, 17.9, 17.10, 17.12, 18, 18.3)
508. Shibahashi H., Osaki Y. Publ. Astron. Soc. Japan, **28**, 199, 1976. (17.10, 17.11, 17.14, 18.3)
509. Shibahashi H., Osaki Y. Publ. Astron. Soc. Japan, **28**, 533, 1976. (17.10, 17.14, 18.2, 18.3)
510. Шкловский И. С. Сверхновые звезды. — М.: Наука, 1966. (1)
511. Sienkiewicz R., Dziembowski W. Nonstationary Evolution of Close Binaries, ed. Żytkow A. N., Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1978, p. 169. (18.3)
512. Simon N. R. Astrophys. J., **159**, 859, 1970. (12.3, 19.4)
513. Simon N. R. Astrophys. J., **164**, 331, 1971. (12.3, 19.4)
514. Simon N. R. Astron. Astrophys. J., **21**, 45, 1972. (12.3)
515. Simon N. R. Astron. Astrophys. J., **21**, 51, 1972. (12.3)
516. Simon N. R. Bull. Amer. Astron. Soc., **6**, 469, 1974. (19.4)
517. Simon N. R. In Proc. Los Alamos Solar and Stellar Pulsation Conf., eds. Cox A. N., Deupree R. G., 1976, p. 173. (12.3)
518. Simon N. R. Astrophys. Space Sci., **51**, 205, 1977. (19.4)
519. Simon N. R. Astron. Astrophys., **75**, 140, 1979. (3.26)
520. Simon N. R., Sastri V. K. Astron. Astrophys., **21**, 39, 1972. (12.3, 19.4)
521. Simon R. Astron. Astrophys., **2**, 390, 1969. (17.3, 19.1a)
522. Slettebak A., ed., Stellar Rotation, Gordon and Breach, New York, 1970. (19.1a)
523. Smeyers P. Acad. Roy. des Sci., des Lett. et des Beaux-Arts d. Belgique, 5^e Ser., **52**, 1126, 1966. (17.6a, 17.7, 17.8)
524. Smeyers P. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège, **36**, 357, 1967. (17.5, 17.5a, 17.8)
525. Smeyers P. Recherche Astron., **8**, 359, 1973. (15.3)
526. Smeyers P. In Proc. Los Alamos Solar and Stellar Pulsation Conf., eds. Cox A. N., Deupree R. G., 1976, p. 140. (19.2)
527. Smeyers P., Denis J. Astron. Astrophys., **14**, 311, 1971. (19.1a)
528. Smith E. V. P., Jacobs K. C. Introductory Astronomy and Astrophysics, W. B. Saunders, Philadelphia, 1973. (3)
529. Smith F. G. Pulsars, Cambridge University Press, Cambridge, 1977. [Имеется перевод: Смит Ф. Г. Пульсары. — М.: Мир, 1979.]
530. Smith H. E. Mercury, **7**, 27, 1978. (1)
531. Smith M. A. Astrophys. J., **215**, 574, 1977. (1, 3.2a, 3.4, 19.7)
532. Smith M. A. Astrophys. J., **224**, 927, 1978. (1, 3.2a, 3.4)
533. Smith M. A. In Nonradial and Nonlinear Stellar Pulsation, Proc. of a Workshop, eds. Hill H. A., Dziembowski W., Springer-Verlag, West Berlin — Heidelberg — New York, 1980, p. 60. (1, 3.2a, 19.7)
534. Smith M. A. In Highlights of Astronomy, vol. 5, ed. Wayman P. A., Reidel, Dordrecht, 1980, p. 457. (1, 3.2a)

535. *Smith M. A., Africano S., Worden S. P.* Preprint, 1979. (3.2a, 3.4)
536. *Smith M. A., Buta R.* *Astrophys. J. (Letters)*, **232**, L193, 1979. (3.2a, 8.4, 19.7)
537. *Smith M. A., McCall M. L.* *Astrophys. J.*, **223**, 221, 1978. (1, 3.2a, 3.4, 19.7)
538. *Sobouti Y.* *Astron. Astrophys.*, **55**, 327, 1977. (17.8, 17.12)
539. *Spiegel E. A.* *Astrophys. J.*, **138**, 216, 1963. (19.3)
540. *Spiegel E. A.* *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **9**, 323, 1971. (19.3)
541. *Spiegel E. A.* *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **10**, 261, 1972. (19.3)
542. *Spiegel E. A., Veronis G.* *Astrophys. J.*, **131**, 442, 1960. (18.2)
543. *Stein R. F., Cameron A. G. W., eds.*, *Stellar Evolution*, Plenum Press, New York, 1966.
544. *Stein R. F., Leibacher J.* *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **12**, 407, 1974. (18.3)
545. *Stellingwerf R. F.* *Astron. Astrophys.*, **21**, 91, 1972. (13, 13.3)
546. *Stellingwerf R. F.* Ph. D. Dissertation, University of Colorado, 1974. (5.1, 12.2, 13.4)
547. *Stellingwerf R. F.* *Astrophys. J.*, **192**, 139, 1974. (12.2, 13.4)
548. *Stellingwerf R. F.* *Astrophys. J.*, **195**, 441, 1975. (12.2)
549. *Stellingwerf R. F.* *Astron. J.*, **83**, 1184, 1978. (10, 10.1, 13.3, 19.7)
550. *Stellingwerf R. F.* *Astrophys. J.*, **227**, 935, 1979. (10, 10.1, 13.1, 13.3)
551. *Stiening R. F., Hildebrand R. H., Spillar E. J.* *Astrophys. J.*, **248**, 268, 1981. (3, 3.2a, 19.7)
552. *Stobie R. S.* *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **144**, 461, 1969. (12.2)
553. *Stobie R. S.* *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **144**, 485, 1969. (12.2)
554. *Stobie R. S.* *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **144**, 511, 1969. (12.2)
555. *Stobie R. S.* *Observatory*, **90**, 20, 1970. (3.26)
556. *Stobie R. S.* *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **157**, 167, 1972. (3.26)
557. *Stobie R. S.* *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **189**, 631, 1977. (3.26)
558. *Stobie R. S., Hawardin T.* *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **157**, 157, 1972. (3.26)
559. *Stothers R., Frogel J. A.* *Astrophys. J.*, **148**, 305, 1967. (8.11, 8.12a)
560. *Strittmatter P. A.* *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **7**, 665, 1969. (19.1a)
561. *Strohmeier W., Knigge R.* *Die Dr. Reimis-Sternwarte Bamberg und die "Veränderliche Sterne" als die Objekte ihrer Forschung*, Reimis-Sternwarte, Bamberg, 1972. (1, 3)
562. *Strong I., Klebesadel R. W., Evans W. D.* *Annals New York Acad. Sci.*, **262**, 145, 1975. (1)
563. *Sweet P. A.* *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **110**, 548, 1950. (19.1a)
564. *Swihart T. L.* *Astrophysics and Stellar Astronomy*, Wiley, New York, 1968. (3)
565. *Tassoul J.-L.* *The Theory of Rotating Stars*, Princeton University Press, Princeton, 1979. [Имеется перевод: Тассуль Ж.-Л., Теория вращающихся звезд. — М.: Мир, 1982.] (19.1)
566. *Taylor R. J.* *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **161**, 365, 1973. (19.2)
567. *Taylor R. J.* *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **162**, 17, 1973. (19.2)
568. *Taylor J. H., Huguenin G. R.* *Astrophys. J.*, **167**, 273, 1971. (2.1)
569. *Taylor J. H., Manchester R. N.* *Pulsars*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1977. [Имеется перевод: Манчестер Р., Тейлор Дж. Пульсары. — М.: Мир, 1980.] (1)
570. *Temple G., Bickley W. G.* *Rayleigh's Principle and Its Applications to Engineering*, Dover, New York, 1956. (8.11)
571. *Thomas L. H.* *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **91**, 619, 1931. (19.4)
572. *Thomson W.* *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **153**, 603, 1863. (17.7)
573. *Thorne K. S.* *In High-Energy Astrophysics*, vol. 3, eds. DeWitt C., Schatzman E., Veron P. (Les Houches Summer School of Theoretical Physics. 1966), Gordon and Breach, New York, 1967, p. 259. (1, 4.2a, 19.5)
574. *Thorne K. S.* *Astrophys. J.*, **149**, 591, 1967. (19.5)

575. *Thorne K. S.* Astrophys. J., **158**, 1, 1969. (19.5)
576. *Thorne K. S.* Astrophys. J., **158**, 997, 1969. (19.5)
577. *Thorne K. S.* Astrophys. J., **212**, 825, 1977. (19.5)
578. *Thorne K. S.* In *Theoretical Principles in Astrophysics and Relativity*, eds. Lebovitz N. R., Reid W. H., Vandervoort P. O., University of Chicago Press, Chicago and London, 1978, p. 149. (19.5)
579. *Thorne K. S., Żytkow A. N.* Astrophys. J., **212**, 832, 1977. (19.5)
580. *Tolstoy I.* Rev. Mod. Phys., **35**, 207, 1963. (17.2, 17.9, 17.10)
581. *Tolstoy I.* Wave Propagation, McGraw-Hill, New York, 1973. (1, 5.46, 17.2, 17.9, 17.10)
582. *Tuggle R. S., Iben I. Jr.* Astrophys. J., **186**, 593, 1973. (10.3, 19.3)
583. *Ulrich R. K.* Astrophys. Space Sci., **7**, 71, 1970. (19.3)
584. *Ulrich R. K.* Astrophys. Space Sci., **7**, 183, 1970. (19.3)
585. *Ulrich R. K.* Astrophys. Space Sci., **9**, 80, 1970. (19.3)
586. *Ulrich R. K.* Astrophys. J., **172**, 165, 1972. (18.2a)
587. *Ulrich R. K.* Astrophys. J., **207**, 564, 1976. (19.3)
588. *Unno W.* Publ. Astron. Soc. Japan, **17**, 205, 1965. (4.3, 7.5, 8.3, 8.4, 9.2a, 18.3)
589. *Unno W.* Publ. Astron. Soc. Japan, **19**, 140, 1967. (13, 19.3, 19.4)
590. *Unno W.* Publ. Astron. Soc. Japan, **20**, 356, 1968. (19.4)
591. *Unno W.* Publ. Astron. Soc. Japan, **27**, 81, 1975. (17.10)
592. *Unno W., Kamijo F.* Publ. Astron. Soc. Japan, **18**, 23, 1966. (13)
593. *Unno W., Osaki Y., Ando H., Shibahashi H.* Nonradial Oscillations of Stars, Tokyo University Press, Tokyo, 1979. (Предисловие, 1, III, 17, 17.66, 17.10, 17.11, 17.14, 18.3)
594. *Unno W., Spiegel E. A.* Publ. Astron. Soc. Japan, **18**, 85, 1966. (18.3)
595. *Unsöld A.* The New Cosmos, 2nd ed., Springer-Verlag, West Berlin, 1977. (3)
596. *Usher P. D., Whitney C. A.* Astrophys. J., **154**, 203, 1968. (13, 13.2, 13.4)
597. *van der Borgh R.* Proc. Astron. Soc. Australia, **1**, 87, 1968. (12.3)
598. *van der Borgh R.* Austral. J. Phys., **22**, 497, 1969. (12.3)
599. *van der Borgh R.* Proc. Astron. Soc. Australia, **1**, 325, 1970. (12.3)
600. *van der Borgh R., Murphy J. O.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **131**, 225, 1966. (12.3)
601. *van Genderin A. M.* Astron. Astrophys., **7**, 244, 1970. (3.1)
602. *Van Horn H. M.* In Proc. IAU Symp. No. 53, Physics of Dense Matter, ed. Hansen C. J., Reidel, Dordrecht, 1974, p. 251. (19.1a)
603. *Van Horn H. M.* In Proc. IAU Colloq. No. 29, Multiple Periodic Variable Stars, ed. Fitch W. S., Reidel, Dordrecht, 1976, p. 259. (18.3)
604. *Van Horn H. M.* In Current Problems in Stellar Pulsation Instabilities, eds. Fishel D., Lesh J. R., Sparks W. M., NASA Tech. Memo. 80625, Washington, D.C., 1980, p. 453. (3, 3.2a, 18.3)
605. *Van Horn H. M., Savedoff M. P.* In Proc. Los Alamos Solar and Stellar Pulsation Conf., eds. Cox A. N., Deupree R. G., 1976, p. 109. (19)
606. *Van Horn H. M., Wesemael F., Winget D. E.* Astrophys. J. (Letters), **253**, L143, 1980. (19.7)
607. *Vauclair G.* In Proc. IAU Symp. No. 42, White Dwarfs, ed. Luyten W. J., Reidel, Dordrecht, 1971, p. 145. (18.3)
608. *Vaughan G. J.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **159**, 375, 1972. (8.12a)
609. *Vemury S. K.* Astrophys. J., **221**, 258, 1978. (19.4)
610. *Vitense E. Z.* Astrophys., **32**, 135, 1953. (19.3)
611. *von Sengbusch K.* Mitteilungen der Astronomischen Gesellschaft, No. 32, p. 228, 1973. (12.2)
612. *von Zeipel H.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **84**, 665, 1924. (19.1a)

613. *Wagoner R. V.* Ann. Rev. Astron. Astrophys., **7**, 553, 1969. (1)
614. *Warner B.* In Proc. IAU Symp. No. 73, Structure and Evolution of Close Binary Systems, eds. Eggleton P., Mitton S., Whelan J., Reidel, Dordrecht — Boston, 1976, p. 85. (1, 3, 3.2a)
615. *Warner B.* In Proc. IAU Colloq. No. 29, Multiple Periodic Variable Stars, ed. Fitch W. S., Reidel, Dordrecht, 1976, p. 247. (3, 3.2a)
616. *Warner B., Brickhill A. J.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **164**, 673, 1974. (3.2a)
617. *Warner B., Robinson E. L.* Nature Phys. Sci., **239**, 2, 1972. (3, 3.2a)
618. *Weinberg S.* Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity, Wiley, New York, 1972. [Имеется перевод: Вейнберг С., Гравитация и космология: принципы и приложения общей теории относительности. — М.: Мир, 1975.] (19.5)
619. *Wesselink A. J.* Bull. Astron. Inst. Netherlands, **10**, 91, 1946. (3.3)
620. *Wesselink A. J.* Bull. Astron. Inst. Netherlands, **10**, 252, 1947. (3.3)
621. *White O. R.*, ed., The Solar Output and Its Variation, Colorado Associated University Press, Boulder, 1977. [Имеется перевод: Поток энергии Солнца и его изменения/Под ред. О. Уайта. — М.: Мир, 1980.] (1)
622. *Will C. M.* Astrophys. J., **190**, 403, 1974. (19.5)
623. *Wilson O. C., Bappu M. K. V.* Astrophys. J., **125**, 661, 1957. (18.3)
624. *Wolff S. C.* In Proc. IAU Colloq. No. 29, Multiple Periodic Variable Stars, ed. Fitch W. S., Reidel, Dordrecht, 1976, p. 43. (19.2)
625. *Wolff C. L.* Astrophys. J., **216**, 784, 1977. (19.1b)
626. *Wolff C. L.* Astrophys. J., **227**, 943, 1979. (Предисловие, III, 17, 17.9 — 17.11, 18, 18.2, 18.3)
627. *Wood P. R.* Ph. D. Dissertation, Australian National University, 1973. (19.3)
628. *Wood P. R.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **174**, 531, 1976. (9.2a)
629. *Woolley R. v. d. R., Stibbs D. W. N.* The Outer Layers of a Star, Clarendon Press, Oxford, 1953. (3.4, 9.2a)
630. *Wright G. A. E.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **146**, 197, 1969. (19.2)
631. *Wright G. A. E.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **162**, 339, 1973. (19.2)
632. *Weubel M.* In Handbuch der Physik, ed. Flügge S., Springer-Verlag, West Berlin, **51**, 1958, p. 38. (19.1a)
633. *Zahn J. P.* Astrophys. Letters, **1**, 209, 1968. (13)
634. *Zahn J. P., Spiegel E. A.*, eds., Proceedings of the IAU Colloq. No. 38, Problems of Stellar Convection, Springer-Verlag, West Berlin — Heidelberg — New York, 1977.
635. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Релятивистская астрофизика. — М.: Наука, 1967. (1, 19.5)
636. Жевакии С. А. Астрон. ж., **30**, 161, 1953. (10.2)
637. Жевакии С. А. Астрон. ж., **31**, 141, 1954. (10.2)
638. Жевакии С. А. Астрон. ж., **31**, 335, 1954. (10.2)
639. *Zhevakin S. A.* Ann. Rev. Astron. Astrophys., **1**, 367, 1963. (1)
640. *Ziebarth K.* Ph. D. Dissertation, University of Colorado, 1970. (9.2b)
641. *Ziebarth K.* Astrophys. J., **162**, 947, 1970. (9.2b)
642. *Żytkow A. N.*, ed., Nonstationary Evolution of Close Binaries, Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1978. (18.3)

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

Ниже приводится список обозначений, которые широко используются в данной книге. Список не претендует на полноту или завершенность. Как правило, каждый приведенный символ употребляется в книге более одного раза; однако в некоторых случаях определяющим фактором для внесения обозначения в список служила его важность, даже если оно встречается лишь однажды. Число после объяснения смысла каждого символа указывает номер раздела, где он впервые определен или использован. Если приведены два числа, то второе дает номер раздела, где обозначение используется особенно часто.

Латинские буквы

a	$= (a_1, a_2, a_3)$. Идентифицирующие параметры в лагранжевом описании поведения сплошной среды	4.1
a	Постоянная давления излучения (постоянная плотности излучения), $a = 4\sigma/c$, где σ — постоянная Стефана — Больцмана	9.2б
a	Индекс для обозначения квазиadiaбатической величины	10.1
a	Оscилляторный момент инерции	19.1б
ad	Индекс для обозначения aдиабатической вели- чины	4.2в
A	$= (1/\rho)\nabla\rho - (1/\Gamma_1 P)\nabla P$	17.1
A	Радиальная составляющая вектора A ; критерий конвективной устойчивости	17.1
A	Обозначение «акустической» области	17.10
$A(\xi)$	$= \xi$	19.1б
$A_{2\nu}$	Коэффициент в разложении A/r	17.6а
b	Величина, определенная выражением, анало- гичным (19.6)	19.1б
$B(T)$	Интегральная функция Планка	4.3
B	$= 3\Gamma_1 - 4$	13.1
$B(\xi)$	$= 2iM\xi$	19.1б
$B_{2\nu}$	Коэффициент в разложении Ag/r^2	17.6а
$B - V$	Показатель цвета	3.1
c	Скорость света в вакууме	2.4
c	Индекс, указывающий, что значение соответст- вующей величины относится к центру звезды	8.12а
c	Величина, определенная выражением, анало- гичным (19.6)	19.1б

c_p	Удельная теплоемкость при постоянном давлении	4.2в
c_v	Удельная теплоемкость при постоянном объеме	4.2в
c_1	$= (r/R)^3 M/m$	17.5б
C	«Интеграл работы»	9.1
C	Величина, определяющая расщепление частот вследствие вращения	19.1в
$C(\xi)$	$= M^2 \xi + \overline{\mathcal{P}}(\xi) + \overline{\mathcal{V}}(\xi)$	19.1б
C_i	Мнимая часть интеграла работы	9.1
C_r	Вещественная часть интеграла работы	9.1
$C_{2\nu}$	Коэффициент в разложении величины $\rho/(\Gamma_1 P)$	17.6а
d	Верхний или нижний индекс, указывающий, что значение соответствующей величины выражено в сутках	2.1
$d\tau$	Элемент объема	4.2а
\mathcal{M}_i	«Эффективная» масса i -й поверхности раздела при разбиении модели звезды на дискретные массовые зоны	8.12б
D	Постоянная, используемая в однозонной модели Бейкера	13.1
D	Интеграл, связанный с отсутствием теплового равновесия	19.4
D/Dt	Одно из обозначений субстанциональной производной	4.1
$D_{2\nu}$	Коэффициент в разложении величины ρ	17.6а
$\mathbf{e}_1, 2, 3$	Единичные базисные векторы в декартовой системе координат	4.2б
$\mathbf{e}_r, \theta, \phi$	Единичные базисные векторы в сферической системе координат	6.1
$\mathbf{e}_{\omega}, \phi, z$	Единичные базисные векторы в цилиндрической системе координат	19.1в
E	Внутренняя энергия на единицу массы	4.2в
\mathcal{E}	$= [(\nabla \cdot \mathbf{F})/\rho]_0$	17.14
E_{grav}	Полная гравитационная энергия	19.2
E_{rot}	Кинетическая энергия вращения	19.2
E_{mag}	Полная магнитная энергия	19.2
$E_{2\nu}$	Коэффициент в разложении величины $\rho g/(r\Gamma_1 P)$	17.6а
\mathbf{f}	Полная «объемная» сила на единицу массы	4.2б
f	Обозначение моды f или связанной с ней величины (иногда как индекс)	17.7
f_i	«Тангенциальная составляющая» произвольного вектора \mathbf{f}	17.3
$f(r, t)$	Произвольная функция от r и t	4.1
$\mathbf{f}(r, t)$	Сила гравитации на единицу массы	4.5
\mathbf{F}	Полный векторный поток тепла вследствие всех механизмов переноса	4.3
F_ν	Поток, излучаемый в единичном интервале частот	3.3
\mathbf{g}	Ускорение силы тяжести	4.5

g	Абсолютное значение ускорения силы тяжести, $g = Gm(r)/r^2$	6.1
g_e	Эффективное ускорение силы тяжести	11.3
g	Обозначение моды g или связанной с ней величины (иногда как индекс)	17.7
$g(\omega)$	$\equiv f(\omega)/X_1(\omega)$	9.26
G	Гравитационная постоянная	1
$G_1, 2$	Линейные операторы	9.26
$G1, G2$	Матрицы	9.26
$G_{1,3}$	Интегралы, связанные с отсутствием теплового равновесия	19.4
G	Обозначение «гравитационной» области	17.10
h	Удельная энтальпия, $h \equiv E + P/\rho$	11.3
h	Час	3.1
H	Напряженность магнитного поля	19.2
l	Единичный тензор	4.26
\mathcal{I}	Единичная матрица	8.126
I	Момент инерции	8.8
I	Действие, $I \equiv \eta^2 \omega$	19.4
J_E	Вектор потока энергии	4.2в
J	Число зон при разбиении модели на дискретные массовые зоны	8.126
J_k	Осцилляторный момент инерции для k -й моды	8.8
$J(r[a, t])$	Якобиан, $J \equiv \partial x_j / \partial a_k $	4.2а
k	Коэффициент функции потемнения к краю $\phi(\theta)$	3.4
\mathbf{k}	Волновой вектор	5.5
k	Индекс, обозначающий k -ю моду (для радиальных колебаний $k = 0, 1, 2, \dots$; для нерадиальных колебаний $k = 1, 2, \dots$)	8.5
k_r	Радиальная составляющая вектора \mathbf{k} (индекс r иногда отбрасывается)	8.4, 17.10
k_H	«Горизонтальная» составляющая вектора \mathbf{k}	18.2
k_T	Полное волновое число	18.2
$K_1, 2$	Линейные операторы	9.26
$K1, K2$	Матрицы	9.26
K	Параметр неадиабатичности, используемый в однозонной модели Бейкера	13.1
K	Коэффициент «лучистой теплопроводности»	17.14
K	Коэффициент теплопроводности	18.2а
l	Степень сферической гармоник $Y_l^m(\theta, \phi)$	17.3
L	Светимость звезды	2.3
L_ν	Светимость в единичном интервале частот	3.3
\mathcal{L}	Линейный самосопряженный оператор, используемый в линейном адиабатическом волновом уравнении	8.8
L_r	Текущая светимость, $L_r \equiv 4\pi r^2 F$	6.1
L_1	Светимость на нижней границе зоны ионизации водорода	11.3
L_2	Светимость на верхней границе зоны ионизации водорода	11.3
L^2	Оператор Лежандра	17.3

m	Звездная величина как единица измерения (обычно верхний индекс)	3.1
m	Величина, используемая в однозонной модели Радда — Розенберга [см. уравнение (13.28)], а также постоянная, используемая в модели Стеллингверфа	13.2
m	Порядок (азимутальный индекс) сферической гармоники	17.3
$m(r)$	Масса, заключенная внутри сферы радиуса r (зависимость от r иногда в явном виде не указывается)	6.1
M	Масса звезды	
\mathcal{M}	Масса газа, содержащегося в основной зоне модели Радда — Розенберга	13.2
M	Оператор, $M = \mathbf{v}_0 \cdot \nabla$	19.16
M_{bol}	Абсолютная болометрическая звездная величина	3.1
M_V	Абсолютная визуальная звездная величина	3.1
\mathbf{n}	Единичный вектор, направленный вдоль внешней нормали к поверхности	4.26
n	Показатель степени при ρ в законе непрозрачности	7.5
n	Показатель степени при P в законе непрозрачности	11.3
n	Показатель политропы	8.12в
n	Индекс для обозначения порядка моды	17.7
n	$= m\Gamma_1 - 2$	13.2
na	Индекс для обозначения неадиабатической величины	19.4
n_0	$= r_0/r_c$	13.2
N	Частота Брунта — Вайсяля	17.2
0	Индекс для обозначения невозмущенного или равновесного значения соответствующей величины (часто опускается)	5.3
$O(\dots)$	Обозначение членов некоторого порядка	9.3, 19.1в
ρ	Поправочный множитель к наблюдаемой лучевой скорости	3.3
ρ	Обозначение моды ρ или связанной с ней величины (иногда как индекс)	17.12
P	Полиное давление	2.1
\mathbb{P}	Тензор полиного давления	4.26
\mathcal{P}	Линейный векторный оператор	15.3
P_g	Газовое давление	8.3
P_r	Давление излучения	8.3
q	Теплосодержание на единицу массы	4.2в
q	Отношение текущего значения массы к полной массе звезды, $= m/M$	8.12а
q	$= \sigma/[4(n+1)]$	11.3
Q	Пульсационная постоянная	2.1
r	Радиальная координата в сферической системе координат, отсчитываемая от центра звезды	2.1

r	Вектор положения точки (радиус-вектор)	4.1
r	Индекс для обозначения радиальной составляющей	17.3
r_c	Радиус жесткого ядра звезды	13.2
R	Радиус звезды	2.1
R	Индекс для обозначения значения на поверхности	8.12в
R_S	Радиус Шварцшильда	1
Re	Вещественная часть комплексной величины, например $\text{Re}(i)$	8.2
s	Секунда	3
s	Удельная энтропия	5.4в
s	Показатель степени при T^{-1} в законе непрозрачности	7.5
s	Собственная частота	13.1
δ	Комплексная угловая частота	13.1, 18.2
δ_0	Частота δ в адиабатическом пределе	18.2а
sp	Индекс для обозначения пространственной части	9.1
S	Поверхность, ограничивающая заданный объем	4.26
S_f	«Критическая акустическая частота»	17.10
\mathcal{J}	Величина, определенная выражением (18.15)	18.2а
t	Время	2.1
t'	$= \omega_0 t$	13.4
\tilde{t}	$= \varepsilon t$	13.4
t_{ff}	Время «свободного падения», или динамическое характерное время	2.2
t_K	Кельвиновское характерное время	2.3
t_{nuc}	«Ядерное» характерное время	2.4
t_s	Характерное время эволюции или «медленного» изменения «статической» модели звезды	19.4
T	Температура	4.1
\mathcal{T}	Полная кинетическая энергия	4.6
T_e	Эффективная температура	3.1
TR	Индекс, указывающий на то, что значение соответствующей величины относится к «переходной области»	10.1
u	Произвольная «достаточно регулярная» векторная функция	15.2
u	Произвольная «достаточно регулярная» функция	8.8
u	$= r^2 \delta r$	17.5а
u_k	k -я собственная функция оператора \mathcal{J}	15.2
$u(r)$	Пространственная часть величины $\delta r(r, t)$	15.2
U	$= d \ln m / d \ln r$	17.5б
U_r	Коэффициент в разложении величины u	17.6а
v	Скорость жидкости	4.1
v	$= u P^{1/\Gamma_1} = r^2 \delta r P^{1/\Gamma_1}$	17.9
v_s	Адиабатическая (лапласова) скорость звука	5.5
v_M	Скорость в меридиональной плоскости	19.1в

v_{gr}	Групповая скорость	17.12
v_{ph}	Фазовая скорость	17.12
V	Объем звезды	2.3
V	Радиальная скорость движения звездной поверхности, $V = \dot{R}$	3.4
$V(t)$	Наблюдаемая лучевая скорость поверхности звезды	3.3
V	Удельный объем, $= 1/\rho$	4.2a
V_{∞}	$= -d \ln P / d \ln r$	8.12a
γ	Линейный векторный оператор	15.3
w	$= u \rho P^{-1/T_1} = P' P^{-1/T_1}$	17.9
x	Декартова координата	4.1
\mathbf{x}	Вектор положения точки	4.5
x	$= r_0 / R_0$	7.3
$x_1, 2, 3$	Компоненты вектора \mathbf{r} в декартовой системе координат	4.1
x_i	Доля по массе атомов i -го вида	5.2
X	Доля водорода по массе	18.2a
X_i	Матрица-столбец, используемая в связи с разбиением модели звезды на дискретные массовые зоны, $= (\mathcal{M}_i)^{1/2} \delta r_i$	8.12b
y	Декартова координата	4.1
y	$= P' / \rho$	17.5a
y_1	$= \delta r / r$	17.5b
y_2	$= (gr)^{-1} (P' / \rho + \psi')$	17.5b
y_3	$= (gr)^{-1} \psi'$	17.5b
y_4	$= (1/g) d\psi' / dr$	17.5b
Y	Доля гелия по массе	10.3
$Y_l^m(\theta, \phi)$	Сферическая гармоника	17.3
Y_s	Коэффициент в разложении y	17.6a
z	Декартова координата	4.1
Z	Доля по массе элементов тяжелее гелия	10.3

Греческие буквы

α	$= \nabla \cdot \delta \mathbf{r}$	17.3
α	$= (\partial \ln \varepsilon / \partial \ln X)_{\rho, T}$	18.2a
$\alpha(r)$	$= (1/w) dv / dr$	17.10
β	Отношение газового давления к полиному, $= P_g / (P_g + P_r)$	8.3
$\beta(r)$	$= (1/v) dw / dr$	17.10
γ	Отношение удельных теплоемкостей, $= c_p / c_v$	4.2b
$\Gamma_{1, 2, 3}$	Показатели адиабаты	4.2b
δ	Лагранжева вариация, например δr	5.3
δ	$= C / J \Sigma^3 $	9.3
δ_{kl}	Символ Кронекера	8.8
$\delta \mathbf{r}$	«Тангенциальная составляющая» вектора $\delta \mathbf{r}$	17.3
$\delta \mathbf{r}_{\theta, \phi}$	Трансверсальные составляющие вектора $\delta \mathbf{r}$	17.3
$\delta \Phi$	«Эффективная потенциальная энергия» звезды в невозмущенном состоянии	8.11
$\delta \Psi$	Полная пульсационная (сумма кинетической и потенциальной) энергия звезды, $= \delta \mathcal{E} = \delta \Phi$	9.1

Δ	Произвольное малое изменение, например Δu	8.10
$\Delta m(r)$	Масса вне поверхности радиуса r , $= M - m(r)$	10.1
ε	Малое отвлеченное число	13.4
ε	Суммарная скорость генерации тепла на единицу массы от всех источников энергии (обычно источниками энергии служат термоядерные реакции)	4.3
ζ	Относительная лагранжева вариация величины r , $= \delta r / r_0$	7.1
ζ	$= \delta r$	15.2
ζ	Величина, определяемая выражением (17.93б) и связанная с трансверсальной составляющей вектора δr	17.11
ζ	Параметр неадиабатичности в модели Стеллингверфа	13.3
η	Инкремент нарастания амплитуды пульсаций	18.3
θ	Полярный угол в сферической системе координат	6.1
Θ	$= L_0 / (\sigma \chi \Delta m_0)$	11.3
κ	Непрозрачность	7.5
κ	Коэффициент устойчивости, $ \kappa = 1/\tau_d$	9.1
κ_I	Коэффициент устойчивости для относительной вариации $\delta r/r$	19.4
κ_{II}	Коэффициент устойчивости для абсолютной вариации δr	19.4
κ_E	Коэффициент устойчивости для полной пульсационной энергии	19.4
λ	Показатель степени при ρ в выражении для скорости генерации термоядерной энергии	7.6
λ	Длина волны возмущения, $= 2\pi/k$	2.1
λ_p	Локальная высота однородной атмосферы, $= -dr/d \ln P$	7.3
Λ	$= 4(\Gamma_3 - 1) + s(\Gamma_3 - 1) - n - 1/2$	13.1
Λ'	$= 4(\Gamma_3 - 1) + s(\Gamma_3 - 1) - n - 4/m$	13.3
μ	Средняя молекулярная масса	17.2
ν	Показатель степени при T в выражении для скорости генерации термоядерной энергии	7.6
ν	Показатель политропы	17.8
ν_e	Эффективный показатель политропы	17.9
$\xi(r)$	Пространственная часть величины $\zeta(r, t)$	8.2
P	Период пульсаций (индексы 0, 1, 2, ... обычно обозначают соответственно основную моду, первый обертоп, второй обертоп и т.д.)	2.1
ρ	Плотность	2.1
ρ_c	Плотность в центре	8.12а
$\rho(r)$	Средняя плотность шара радиуса r , $= m(r)/(4/3 \pi r^3)$	8.9
σ	Угловая частота пульсаций	2.1
σ'_{tot}	Поправка к частоте ω вследствие эффектов вращения (индекс «tot» иногда отбрасывается)	19.1в

Σ^2	Вещественное число, определенное соотношением (8.41)	8.10
Σ^2	Вещественное число, определенное соотношением (15.16)	19.2
$\phi(\theta)$	Функция потемнения к краю	3.4
ϕ	Азимутальный угол в сферической системе координат	6.1
ϕ	Фаза величины $(\delta L/L)_2$ относительно $(\delta L/L)_1$	11.3
ϕ	Фазовый угол	13.4
Φ	Полная гравитационная потенциальная энергия	4.6
χ	$= P'/\rho + \psi'$	17.3
χ_T	$= (\partial \ln P / \partial \ln T)_\rho$	4.2в
χ_μ	$= (\partial \ln P / \partial \ln \mu)_{\rho, T}$	17.2
χ_ρ	$= (\partial \ln P / \partial \ln \rho)_T$	4.2в
$\psi(r, t)$	Гравитационный потенциал	4.5
Ψ	«Полная» энергия, $= \mathcal{F} + U + \Phi$	4.6
Ψ	Полная энергия пульсаций $= \mathcal{F} + \delta\Phi$	8.11
Ψ_ρ	Коэффициент в разложении величины ψ'	17.6а
ω	Угловая частота пульсаций	8.12б
ω	Расстояние от оси вращения (в цилиндрических координатах)	19.1а
$\omega_{1, 2, 3}$	Решения уравнения $i\omega(\omega^2 - \Sigma^2) = C/J$	9.3
Ω	Гравитационная потенциальная энергия звезды	2.3
Ω	Безразмерная угловая частота, $= \sigma^2 R^3 / GM$	8.6
Ω	Угловая скорость вращения	19.1а

Прочие символы и обозначения

\cdot (точка)	Производная по времени (субстанциональная), например \dot{r}	2.1, 4.2а
$\bar{}$ (черта)	Среднее значение, например $\bar{\rho}$	2.1
\odot	Значение для Солнца, например ρ_\odot	2.1
$\langle \dots \rangle$ (угловые скобки)	Среднее значение, например $\langle \rho \rangle$	3.1
∇ (набла)	Оператор градиента	4.1
\vdots (двоеточие)	Двойное скалярное произведение в тензорной алгебре, например $\mathbb{P}:(\nabla \mathbf{v})$	4.2в
∇^2 (набла-квадрат)	Оператор Лапласа, $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$	4.5
$ \dots $	Абсолютная величина вектора, например $ \mathbf{v} $	5.2
$ \dots $	Модуль	7.1
$ \dots $	Определитель матрицы	8.12б
$'$ (штрих)	Дифференцирование по x ($= r_0/R_0$)	8.12а
$'$ (штрих)	Эйлерова вариация, например f'	5.3
δ	Лагранжева вариация, отклонение от равновесного значения, например δP	2.1
* (звездочка)	Комплексно сопряженная величина, например ξ^*	8.8
∇_x	Градиент в точке \mathbf{x}	15.1
∇^x	Логарифмический температурный градиент, $= d \ln T / d \ln P$	17.2
∇_{ad}	$= (\Gamma_2 - 1)/\Gamma_2$	17.2
\propto	Знак пропорциональности	17.8

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редактора перевода	5
Предисловие к русскому изданию	10
Предисловие	12

I

Предварительные сведения

1. ВВЕДЕНИЕ	15
2. НЕКОТОРЫЕ ВАЖНЫЕ ХАРАКТЕРНЫЕ ВРЕМЕНА	19
2.1. Период пульсаций	19
2.2. Время свободного падения	22
2.3. Кельвиновское время	22
2.4. Ядерное время	24
3. НЕКОТОРЫЕ ДАННЫЕ НАБЛЮДЕНИЙ	24
3.1. Классические цефеиды и соотношение период — светимость	27
3.2. Новые типы переменных звезд	32
3.3. Эмпирическое определение радиусов пульсирующих звезд	34
3.4. Потемнение к краю и скорость радиального расширения звезды	35
4. НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ	36
4.1. Представления Эйлера и Лагранжа	37
4.2. Уравнения сохранения массы, импульса и энергии	39
4.3. Приращение и потери тепла	45
4.4. Общее обсуждение уравнений	47
4.5. Гравитационное поле	48
4.6. Теорема сохранения энергии для самогравитирующей системы	49
5. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ	50
5.1. Введение	51
5.2. Обсуждение равновесных состояний	53
5.3. Эйлеровы и лагранжевы вариации	55
5.4. Линеаризованные уравнения	59
5.5. Приложение: адиабатические звуковые волны	62

II

Радиальные колебания звезд

6. СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОЕ РАДИАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ	64
6.1. Представление Эйлера	65
6.2. Представление Лагранжа	67

7.	ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ	69
7.1.	Введение	69
7.2.	Уравнение неразрывности	70
7.3.	Уравнение импульса	70
7.4.	Уравнение энергии	71
7.5.	Приближение лучистой теплопроводности	72
7.6.	Скорость генерации термоядерной энергии	72
7.7.	Линеаризованное неадиабатическое уравнение для $\delta r/r$	73
8.	ЛИНЕЙНЫЕ АДИАБАТИЧЕСКИЕ РАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ	73
8.1.	Общие соображения	75
8.2.	Решение типа стоячей волны для линейного адиабатического волнового уравнения	76
8.3.	Граничные условия	77
8.4.	Условие существования стоячих волн в звездных недрах	80
8.5.	Проблема линейных адиабатических радиальных пульсаций как задача о собственных значениях	82
8.6.	Соотношение период — средняя плотность	83
8.7.	Физическое рассмотрение	84
8.8.	Обсуждение собственных значений: математический подход	86
8.9.	Условия существования осциллирующих решений	88
8.10.	Вариационное свойство собственных значений	91
8.11.	Физическая интерпретация некоторых выражений	93
8.12.	Решение линейного адиабатического волнового уравнения	98
8.13.	Весовые функции	107
8.14.	Влияние переменного значения Γ_1 в оболочке	107
8.15.	Приближенные формулы для собственных значений и результаты их использования	108
9.	ЛИНЕЙНЫЕ НЕАДИАБАТИЧЕСКИЕ РАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ	109
9.1.	Обзор проблемы: физическое рассмотрение	110
9.2.	Математические аспекты	115
9.3.	Интегральные выражения для собственных значений	125
9.4.	Оценка коэффициента устойчивости Эддингтоном	127
10.	ПУЛЬСАЦИОННАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕАЛЬНЫХ ЗВЕЗД	129
10.1.	Механизмы возбуждения пульсаций, связанные с ионизацией вещества в оболочке звезды	130
10.2.	Краткий исторический очерк	137
10.3.	Необходимое условие возникновения неустойчивости и некоторые следствия	139
11.	ФАЗОВОЕ ЗАПАЗДЫВАНИЕ	142
11.1.	Наблюдения и краткая история	142
11.2.	Качественное рассмотрение наиболее общепринятой теории	143
11.3.	Дополнительные подробности упрощенной теории	144
11.4.	Сравнение с детальными расчетами и дополнительные замечания	149
12.	НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ	151
12.1.	Точно интегрируемые случаи	152

12.2.	Численные методы	153
12.3.	Аналитические методы	155
13.	ПРОСТЫЕ МОДЕЛИ ЗВЕЗДНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ	156
13.1.	Однозонная модель Бейкера	157
13.2.	Модель Радда — Розенберга	163
13.3.	Модель Стеллингверфа	168
13.4.	Модель Кастора	172

III

Нерадиальные колебания звезд

14.	ОБЩЕЕ НЕЛИНЕЙНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ	180
15.	САМОСОПРЯЖЕННОСТЬ ЛИНЕЙНОГО АДИАБАТИЧЕСКОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ	181
15.1.	Введение	182
15.2.	Свойства линейного адиабатического волнового уравнения для важного частного случая	184
15.3.	Более общий случай	188
16.	НАРАСТАНИЕ ИЛИ ЗАТУХАНИЕ МАЛЫХ НЕРАДИАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ	189
16.1.	Линеаризованное уравнение энергии	189
16.2.	Интегральные выражения для собственных значений	192
17.	ЛИНЕЙНЫЕ АДИАБАТИЧЕСКИЕ НЕРАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ЗВЕЗД	194
17.1.	Основные уравнения	195
17.2.	Обсуждение величины A	196
17.3.	Представление переменных, связанных с возмущениями, с помощью сферических гармоник	200
17.4.	Порядок уравнений и смежные вопросы	204
17.5.	Методы решения для моделей общего вида	205
17.6.	Граничные условия	207
17.7.	Однородная сжимаемая модель	214
17.8.	Общее описание мод p , g и f	218
17.9.	Приближение Каулинга	229
17.10.	Нерадиальные моды для сложных звездных моделей	231
17.11.	Фазовые диаграммы	238
17.12.	Нерадиальные колебания для мод очень высокого порядка	242
17.13.	Весовые функции	248
17.14.	Времена затухания	249
18.	ЛИНЕЙНЫЕ НЕАДИАБАТИЧЕСКИЕ НЕРАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ЗВЕЗД	251
18.1.	Порядок уравнений и граничные условия	252
18.2.	Локальный анализ	254

18.3. Новые исследования	264
19. СМЕШАННЫЕ ВОПРОСЫ	272
19.1. Влияние вращения	273
19.2. Влияние магнитных полей	281
19.3. Влияние конвекции	282
19.4. Влияние отсутствия теплового равновесия	284
19.5. Эффекты общей теории относительности	291
19.6. Вековая устойчивость	292
19.7. Общее значение теории звездных пульсаций	294
Литература	297
Список обозначений	315

Уважаемый читатель!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».

Джон П. Коке

ТЕОРИЯ ЗВЕЗДНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ

Ст. научный редактор М. Я. Рутковская

Художник М. Г. Жуков

Художественный редактор М. Н. Кузьмина

ИБ № 3231

Подписано к печати 19.05.83. Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная № 1.
Гарнитура таймс. Печать офсетная. Объем 10,25 бум. л. Усл. печ. л. 20,50.

Усл. кр.-отт. 20,50. Уч.-изд. л. 23,70. Изд. № 27/2130.

Тираж 2000 экз. Зак. 3 6 2 Цена 3 р. 80 к.

Набрано на фотонаборном комплексе в издательстве «Мир»,
129820, Москва, И-110, ГСП, 1-я Рижский пер., 2.

Отпечатано в Тульской типографии Союзполиграфпрома
при Государственном комитете СССР по делам издательства, полиграфии
и книжной торговли

г. Тула, проспект им. В. И. Ленина, 109



ДІКСИОНАРИЙ ТЕОРИИ СПЕЦИАЛЬНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ

АВТОР-СОСТАВИТЕЛЬ: А.А. АБДУЛЛИН